

Faculté de génie
Département de génie électrique

LOIS DE COMMANDE PRÉDICTIVES AUTONOMES POUR VOL EN FORMATION DE SATELLITES TERRESTRES

Mémoire de maîtrise en sciences appliquées

Spécialité : génie électrique

Composition du Jury :

Jean de Lafontaine ing., Ph.D

Aymeric Kron, ing., Ph.D

Gérard Lachiver ing., Ph.D

Vincent Simard Bilodeau

Sherbrooke (Québec), Canada

Été 2008

Pages blanches: II, 2, 6, 8,
36, 62, 68, 72, 74, 140, 146,
164, 180 et 190.
Laisser tel quel.

IV-1899



Library and
Archives Canada

Bibliothèque et
Archives Canada

Published Heritage
Branch

Direction du
Patrimoine de l'édition

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

ISBN: 978-0-494-49585-8

Our file Notre référence

ISBN: 978-0-494-49585-8

NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

RÉSUMÉ

Les technologies spatiales évoluent actuellement vers la fabrication de plusieurs microsattellites autonomes volant en formation plutôt que vers la construction de gros satellites. Cette stratégie est avantageuse. Par exemple, elle permet d'accroître la résolution des mesures en corrélant les signaux provenant des instruments scientifiques des microsattellites. Cette antenne synthétique de grande ouverture serait impossible à déployer avec un seul satellite.

Pour profiter des avantages de cette stratégie, des lois de commande optimales (a au sens du temps et du coût en propergol) et autonome qui permettent de maintenir et de reconfigurer une formation doivent être développées. Ce travail de recherche s'intéresse à ce sujet. Plus précisément, il traite des aspects suivants :

1. Pour développer la loi de commande d'un système, il est nécessaire de savoir le modéliser. Ce document débute donc par une présentation des modèles dynamiques les plus utilisés pour décrire le mouvement relatif entre deux satellites volant en formation sur une orbite terrestre.
2. Plusieurs auteurs se sont intéressés à asservir une formation de satellites, les plus importantes de celles-ci sont présentées dans ce document. Par cette étude de la littérature, le candidat démontre que les lois de commande prédictives sont des solutions efficaces comportant plusieurs avantages. Par exemple, ces approches sont optimales et permettent de traiter des contraintes sur les entrées et les sorties du système asservi.
3. En lien avec ce qui précède, une étude détaillée de la théorie des lois de commande prédictives linéaires et non linéaires discrètes est présentée.
4. Par la suite, ces lois de commande prédictives sont appliquées sur un système simple, soit une grue à trois axes. Ces exemples ont été développés pour accroître l'expertise de l'auteur dans ce domaine ainsi que pour présenter les avantages et les performances des lois de commande prédictives.
5. Finalement, ce document présente le développement d'une loi de commande prédictive pour le vol en formation de satellites basée sur le modèle de Lawden et de GVE (Équations de Variation de Gauss) linéarisées. Les précédentes approches basées sur ce type de loi de commande reposaient sur l'optimisation de l'effort de commande soumis à des contraintes sur les entrées et les sorties du système en utilisant un algorithme complexe et non autonome pour maintenir et reconfigurer la formation. La technique proposée est plutôt de minimiser une

fonction coût quadratique incluant directement les erreurs relatives futures, et ce, en considérant des contraintes sur les actionneurs (contraintes sur les entrées du système). La commande optimale est obtenue avec un algorithme analytique basé sur la projection de la fonction coût sur les contraintes permettant ainsi de réduire considérablement le temps de calcul.

Mots clés : formation de satellites, grue à trois axes, lois de commandes prédictives, optimisation quadratique explicite avec contraintes, satellites autonomes, orbites excentriques.

REMERCIEMENTS

Je tiens à souligner la contribution de mon directeur de recherche, Professeur Jean de Lafontaine qui m'a supporté techniquement et financièrement tout au long de mon projet de recherche. De plus, il m'a permis d'être chargé de cours pour la session 4 en génie électrique et de poursuivre au doctorat au sein de son entreprise, NGC Aérospatiale, avec la collaboration de l'Agence Spatiale Européenne et Thales Aérospatiale.

De plus, j'aimerais remercier le Conseil de Recherches en Sciences Naturelles et en Génie du Canada (CRSNG), le Fond Québécois de Recherche sur la Nature et les Technologies (FQRNT) et le Département de génie électrique et de génie informatique de l'Université de Sherbrooke qui m'ont permis de me concentrer entièrement à la recherche et à l'enseignement ainsi que de présenter mes travaux au « 2008 AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting » en me fournissant le financement nécessaire pendant deux ans.

Enfin, je veux aussi remercier ma copine, Corinne Gagnon-Poirier qui m'a soutenu moralement tout au long de ma maîtrise et qui m'a aidé à corriger l'orthographe et la syntaxe de ce document.

GLOSSAIRE

Calcul polynomial

$A(\)$	Une lettre majuscule en style gras en fonction d'un paramètre indépendant représente une matrice polynomiale
A	Une lettre majuscule en style régulier représente une matrice réelle contenant les coefficients d'un même degré d'un polynôme
$A(\)$	Une lettre majuscule en style régulier en fonction d'un paramètre indépendant représente un polynôme
δ	Opérateur qui désigne le degré d'un polynôme

Calcul matriciel

A	Une lettre majuscule en style gras représente une matrice réelle
a_{ij}	Élément ij d'une matrice
a	Matrice colonne ou ligne
a_i	Élément i d'une matrice colonne ou ligne
$\mathbf{1}$	Vecteur colonne dont tous les éléments sont 1 de dimension appropriée
$\mathbf{1}_{m \times 1}$	Vecteur colonne dont tous les éléments sont 1 de m lignes
I	Matrice identité de dimension appropriée
$I_{m \times m}$	Matrice identité de dimension m
$\mathbf{0}$	Matrice nulle de dimension appropriée
$\mathbf{0}_{m \times n}$	Matrice nulle de m lignes et n colonnes
$\det(A)$	Déterminant de la matrice A
$A = \text{diag}([x_1 \ \cdots \ x_n])$	Matrice diagonale avec les éléments diagonaux égale à $[x_1 \ \cdots \ x_n]$

Calcul vectoriel et systèmes de repères

$\vec{\mathfrak{z}}_a$	Vectrice du repère a
$\overrightarrow{(\quad)}$	Vecteur
\boldsymbol{v}^I	Lettre minuscule en style gras représentant les composantes d'un vecteur et l'exposant indique dans quel repère ces composantes sont exprimées
$\ \quad \ $	Norme d'un vecteur
\times	Produit vectoriel entre deux vecteurs
$(\quad)^\times$	Matrice croisée
\cdot	Produit scalaire entre deux vecteurs ou un produit entre deux scalaires
$(\quad)^T$	Matrice transposée

Calcul différentiel

$(\dot{\quad})$	Dérivée première par rapport au temps dans un repère inertiel
$(\ddot{\quad})$	Dérivée deuxième par rapport au temps dans un repère inertiel
$(\overset{\circ}{\quad})$	Dérivée première par rapport au temps dans un repère tournant
$(\overset{\circ\circ}{\quad})$	Dérivée deuxième par rapport au temps dans un repère tournant
d	Différentielle totale
∂	Différentielle partielle
Δ	Variation

Modèle continu et discret

m	nombre d'entrées
n	nombre de sorties

s	Nombre d'états
t	Variable indépendante en temps
k	Variable indépendante en échantillon
z^{-1}	Délai unitaire
Δ	Opérateur incrémental $(1 - z^{-1})$
$\tilde{A}(z^{-1})$	Polynôme multiplié par l'opérateur incrémental Δ
$a(k+i k+j)$	Valeur de la variable a à l'échantillon $k+i$ disponible au temps $k+j$
t_s	Période d'échantillonnage
\mathbf{x}_0	Matrice colonne des états initiaux
\mathbf{d}	Matrice colonne de constantes d'intégration
$\mathbf{x}(t)$	Matrice colonne d'états dans le domaine continue
$\mathbf{u}(t)$	Matrice colonne des entrées dans le domaine continue
$\mathbf{y}(t)$	Matrice colonne des sorties dans le domaine continue
$\mathbf{n}(t)$	Bruit blanc gaussien représentant des perturbations dans le domaine continue
$\mathbf{x}_f(t)$	Matrice colonne des états homogènes, naturels ou non perturbés
$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{h}^c(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$	Équation d'états non linéaire dans le domaine continue
$\mathbf{y}(t) = \mathbf{p}^c(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$	Équation de sorties non linéaire dans le domaine continue
$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}^c \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}^c \mathbf{u}(t)$	Équation d'états linéaire dans le domaine continue
$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}^c \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}^c \mathbf{u}(t)$	Équation de sorties linéaire dans le domaine continue
$\mathbf{x}_f(t) = \mathbf{f}(\mathbf{d}, t)$	Réponse homogène, naturelle ou non perturbée dans le domaine continue
$\Phi(t, t_0)$	Matrice d'états de transition
$\mathbf{x}(k)$	Matrice colonne d'états dans le domaine discret
$\mathbf{u}(k)$	Matrice colonne des entrées dans le domaine discret

$y(k)$	Matrice colonne des sorties dans le domaine discret
$n(k)$	Bruit blanc gaussien représentant des perturbations dans le domaine discret
$\begin{aligned} & A(z^{-1})y(k k) \\ &= B(z^{-1})u(k-1 k) \\ &+ \frac{C(z^{-1})n(k k)}{\Delta} \end{aligned}$	Modèle fonctions de transfert dans le domaine discret
$\begin{aligned} & x(k+1 k) \\ &= h(x(k k), u(k k)) \end{aligned}$	Équation d'états non linéaire dans le domaine discret
$\begin{aligned} & y(k k) \\ &= p(x(k k), u(k k)) \end{aligned}$	Équation de sorties non linéaire dans le domaine discret
$\begin{aligned} & x(k+1 k) \\ &= Ax(k k) + Bu(k k) \end{aligned}$	Équation d'états linéaire dans le domaine discret
$\begin{aligned} & y(k k) \\ &= Cx(k k) + Du(k k) \end{aligned}$	Équation de sorties linéaire dans le domaine discret
$\begin{aligned} & x(k+1 k) \\ &= A_k x(k k) + B_k u(k k) \end{aligned}$	Équation d'états linéaire discrète locale dans le domaine discret obtenue à partir d'une équation d'état non linéaire à paramètres variant dans le temps ou non linéaire
$\begin{aligned} & y(k k) \\ &= C_k x(k k) + D_k u(k k) \end{aligned}$	Équation de sorties linéaire locale dans le domaine discret obtenue à partir d'une équation de sorties non linéaire à paramètres variant dans le temps ou non linéaire

Compensateurs prédictifs

$J(\)$	Fonction coût
$(\)^d$	Paramètre désiré
$(\)^*$	Paramètre optimal
$(\)^{\square*}$	Paramètre optimal respectant les contraintes établies
$(\)^{\sim*}$	Paramètre quasi-optimal respectant les contraintes établies

$(\hat{})$	Paramètre estimé
R_{MPC}, Q_{MPC}	Matrice de pondération d'un compensateur prédictif
R_{KF}, Q_{KF}	Matrice de pondération d'un filtre de Kalman
N_1	Borne inférieure de l'horizon de prédiction
N_2	Borne supérieure de l'horizon de prédiction
N	Horizon de prédiction ($N_2 - N_1 + 1$)
N_3	Horizon de contrôle
$G_{mdl,prc,sor}$	Matrice des paramètres de Marcov. L'indice <i>mdl</i> indique le type de modèle utilisé pour obtenir cette matrice (<i>tf</i> désigne le modèle fonctions de transfert, <i>ss</i> le modèle variables d'état, <i>nl</i> modèle variables d'état non linéaire et <i>vp</i> modèle linéaire à paramètres variant). L'indice <i>prc</i> désigne le nom du procédé. Finalement, l'indice <i>sor</i> désigne la ou les sorties à lesquelles cette matrice correspond.
$f_{mdl,prc,sor}$	Réponse homogène, naturelle ou non perturbée future.
y_N	Séquence des sorties prédites sur un horizon N
u_N	Séquence future de commandes sur un horizon N
Δu_N	Séquence future d'incrément de commandes sur un horizon N
$(\overline{})$	Borne supérieure d'un paramètre
$(\underline{})$	Borne inférieure d'un paramètre
$\min_u J(u)$	Minimum de J selon la valeur de u
$\max_u J(u)$	Maximum de J selon la valeur de u
$E\{ \}$	Espérance mathématique

Mouvement orbital

a	Axe semi-majeur
e	Excentricité

i	Inclinaison
u	Argument de latitude
θ	Anomalie vraie
ω	Argument du périégée ou vitesse angulaire selon le contexte
n	Mouvement angulaire moyen
E	Anomalie excentrique
M	Anomalie moyenne
r_a	Distance entre le centre de la Terre et l'apogée
r_p	Distance entre le centre de la Terre et le périégée
A	Apogée
P	Périégée
p	Semi-latus rectum
h	Quantité de mouvement angulaire
l	Ligne des nœuds
$\vec{\mathcal{S}}_H$	Repère orbital
$\vec{\mathcal{S}}_I$	Repère inertiel
$\vec{\mathcal{S}}_O$	Repère orbital
r	Altitude d'un satellite
v	Vitesse d'un satellite
$(\)_r$	Paramètre radial à l'orbite
$(\)_\theta$	Paramètre transversal à l'orbite
$(\)_n$	Paramètre normal à l'orbite
nd	Nœud descendant
na	Nœud ascendant

Acronymes

CARIMA	« Controlled Autoregressive Integrated Moving Average »
GVE	Équations de Variation de Gauss
LP	Programmation Linéaire
MPC	Compensateur prédictif basé sur le Modèle traduit de l'anglais « Model Predictive Controller »
QP	Programmation Quadratique
TEAM	« Tele-Education in Aerospace and Mechatronics »

TABLE DES MATIÈRES

I.	INTRODUCTION	1
1.	Introduction	3
II.	ÉTAT DE L'ART	7
2.	Modélisation d'une formation de satellites.....	9
2.1.	Système de repères	9
2.2.	Dynamique orbitale cartésienne	11
2.3.	Dynamique orbitale par éléments d'orbite	16
2.4.	Dynamique orbitale relative cartésienne	17
2.4.1.	Modèle non linéaire	18
2.4.2.	Modèle de Lawden	19
2.4.3.	Modèle de Hill	24
2.4.4.	Modèle de Hill incluant J_2	27
2.5.	Dynamique orbitale relative par éléments d'orbite	29
2.6.	Type de formation de satellites	33
2.6.1.	Formations naturelles.....	33
2.6.2.	Formations forcées ou artificielles	35
2.7.	Résumé	35
3.	Lois de commande d'une formation de satellites.....	37
3.1.	Lois de commande continues cartésiennes-inertielle.....	38
3.2.	Lois de commande continue cartésienne-Hill.....	39
3.2.1.	Loi de commande de Lyapunov	39
3.2.2.	Loi de commande prédictive	40
3.2.3.	Loi de commande robuste.....	41
3.3.	Loi de commande continue par éléments d'orbite	43
3.3.1.	Lyapunov	43
3.3.2.	Prédictive	45
3.4.	Loi de commande impulsive	45

3.4.1. Lovell	45
3.4.2. Schaub	46
3.5. Résumé	48
4. Commande prédictive linéaire discrète	49
4.1. Modèle	49
4.1.1. Fonctions de transfert	50
4.1.2. Modèle variables d'état	50
4.2. Prédiction	51
4.2.1. Fonctions de transfert	52
4.2.2. Modèle variables d'état	54
4.3. Optimisation et loi de commande	56
4.4. Stabilité	57
4.4.1. Modèle fonctions de transfert	57
4.4.2. Modèle variables d'état	58
4.5. Contraintes	59
4.5.1. Types de contraintes	60
4.5.2. Algorithme d'optimisation	61
4.6. Résumé	61
5. Commande prédictive non linéaire discrète	63
5.1. Modèle	63
5.2. Prédiction	63
5.3. Optimisation et loi de commande	66
5.4. Résumé	66
III. OBJECTIFS ET MÉTHODOLOGIE	67
6. Objectifs et méthodologie	69
6.1. Objectifs	70
6.2. Méthodologie	70
IV. CONCEPTION DE LA LOI DE COMMANDE	73
7. Commande prédictive et grue à trois axes	75
7.1. Compensateur prédictif linéaire fonction de transfert	75
7.2. Compensateur prédictif linéaire modèle variables d'état	81
7.3. Compensateur prédictif non linéaire	87

7.4. Résumé	92
8. Commande prédictive et vol en formation	93
8.1. Architecture d'asservissement	93
8.2. Développement de la loi de commande prédictive	99
8.2.1. Discrétisation des modèles	100
8.2.2. Observateur	102
8.2.3. Prédicteur	102
8.2.4. Optimiseur	105
8.3. Résumé	109
9. Simulations et résultats	111
9.1. Simulateur non linéaire	111
9.2. Résultats et analyse	114
9.2.1. Compensateur basé sur le modèle de Lawden	115
9.2.2. Compensateur basé sur le modèle de GVE linéarisées	131
9.3. Résumé	138
V. DISCUSSION ET CONCLUSION	139
10. Discussion et conclusion	141
10.1. Retour sur les objectifs	141
10.2. Résumé de la démarche et des contributions	142
10.3. Travaux futurs	144
VI. ANNEXES	145
A. Mathématique vectorielle	147
A.1. Vecteurs	147
A.2. Repères	147
A.3. Composantes	148
A.4. Vectrices	148
A.5. Matrices de rotation	149
A.6. Cinématique des vectrices	154
B. Équations de variation de Gauss	155
B.1. Variation de paramètres	155
B.1.1. Axe semi-majeur	156
B.1.2. Excentricité	156

B.1.3. Ascension droite du nœud ascendant et inclinaison	157
B.1.4. Anomalie moyenne	158
B.1.5. Argument du périhélie	159
B.2. Équations de variation de Gauss	159
C. Correspondance linéaire entre les coordonnées relatives cartésiennes et la différence des éléments d'orbite.....	161
D. Algorithmes d'optimisation numérique.....	165
D.1. Multiplicateurs de Lagrange	165
D.2. Programmation linéaire : méthode du simplexe.....	167
D.3. Programmation quadratique : méthode de l'ensemble actif	172
D.4. Programmation quadratique : Méthode du point intérieur.....	174
D.5. Programmation multiparamétrique	176
E. Modélisation d'une grue à trois axes.....	181
E.1. Mise en équations	182
E.1.1. Entrées	182
E.1.2. Sorties.....	182
E.1.3. Vecteurs d'états	182
E.1.4. Charge	183
E.1.5. Chariot.....	184
E.1.6. Pont	185
E.2. Modèle variables d'état non linéaire.....	185
E.3. Linéarisation	186
E.4. Définition des paramètres.....	189
BIBLIOGRAPHIE.....	191

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1 :	Organisation de l'état de l'art.....	4
Figure 2.1 :	Repères utilisés pour décrire le mouvement d'un satellite en orbite	10
Figure 2.2 :	Repère de Hill.....	11
Figure 2.3 :	Paramètres du plan orbital	14
Figure 2.4 :	Formation de deux satellites de type chef-esclave.....	17
Figure 2.5 :	Organigramme de la théorie concernant la modélisation du mouvement orbital relatif cartésien.....	18
Figure 2.6 :	États relatifs obtenus par le modèle de Lawden avec $e = 0.1$	23
Figure 2.7 :	Erreurs relatives du modèle de Lawden par rapport au mouvement relatif non linéaire avec $e = 0.1$	23
Figure 2.8 :	États relatifs obtenus par le modèle de Lawden avec $e = 0.7$	24
Figure 2.9 :	Erreurs relatives du modèle de Lawden par rapport au mouvement relatif non linéaire avec $e = 0.7$	24
Figure 2.10 :	États relatifs obtenus par le modèle de Hill avec $x_0 = [100, 100, 100, 0,$ $-200n, 0]^T$	25
Figure 2.11 :	Erreurs relatives du modèle de Hill par rapport au mouvement relatif non linéaire avec $x_0 = [100, 100, 100, 0, -200n, 0]^T$	25
Figure 2.12 :	États relatifs obtenues par le modèle de Hill avec $x_0 = [10^4, 10^4, 10^4,$ $0, -2 \times 10^4 n, 0]^T$	26
Figure 2.13 :	Erreurs relatives du modèle de Hill par rapport au mouvement relatif non linéaire avec $x_0 = [10^4, 10^4, 10^4, 0, -2 \times 10^4 n, 0]^T$	26
Figure 2.14 :	Diagramme des phases en position obtenu par la solution homogène du modèle de Hill avec $x_0 = [100, 100, 100, 0, -200n, 0]^T$	27
Figure 2.15 :	Organigramme de la théorie concernant la modélisation du mouvement orbital relatif par éléments d'orbite.....	30
Figure 2.16 :	États relatifs obtenus par le modèle de Schaub avec $e = 0.1$	33

Figure 2.17 :	Erreurs relatives du modèle de Schaub par rapport au mouvement relatif non linéaire avec $e = 0.1$	33
Figure 2.18 :	États relatifs obtenus par le modèle de Schaub avec $e = 0.7$	33
Figure 2.19 :	Erreurs relatives du modèle de Schaub par rapport au mouvement relatif non linéaire avec $e = 0.7$	33
Figure 3.1 :	Organigramme de la théorie concernant les lois de commande pour les formations de satellites.....	37
Figure 3.2 :	Représentations schématique d'une LFT	41
Figure 3.3 :	Système augmenté utilisé pour la synthèse des lois de commande robuste pour les formations de satellites.....	42
Figure 4.1:	Schéma simplifié de l'algorithme d'un compensateur prédictif.....	49
Figure 4.2:	Schéma représentant un modèle linéaire sous forme de matrice d'état d'un système dynamique incluant les différentes sources de perturbations d_s et d_o	51
Figure 4.3:	Fonction coût représentée dans l'espace de la séquence des commandes	59
Figure 7.1:	Architecture d'asservissement pour une grue trois axes avec un compensateur prédictif linéaire discret utilisant le modèle fonctions de transfert.....	76
Figure 7.2:	Compensateur prédictif linéaire discret utilisant le modèle fonctions de transfert.....	78
Figure 7.3 :	Commandes obtenues par le MPC linéaire discret basé sur le modèle fonctions de transfert.....	80
Figure 7.4:	Positions de la charge obtenues par le MPC linéaire discret basé le modèle fonctions de transfert.....	80
Figure 7.5:	Angles obtenus par le MPC linéaire discret basé sur le modèle fonctions de transfert.....	80
Figure 7.6:	Architecture d'asservissement pour une grue trois axes avec un compensateur prédictif linéaire discret utilisant le modèle variables d'état	81
Figure 7.7:	Compensateur prédictif linéaire discret utilisant le modèle variables d'état	82

Figure 7.8 :	Commandes obtenues par le MPC linéaire discret basé sur le modèle variables d'état	83
Figure 7.9:	Positions de la charge obtenues par le MPC linéaire discret basé sur le modèle variables d'état	83
Figure 7.10 :	Angles obtenus par le MPC linéaire discret baés sur le modèle variables d'état	84
Figure 7.11:	Compensateur prédictif linéaire discret utilisant le modèle variables d'état avec contraintes	85
Figure 7.12 :	Commandes obtenues par le MPC linéaire discret avec contraintes basé sur le modèle variables d'état	87
Figure 7.13:	Positions de la charge obtenues par le MPC linéaire discret avec contraintes basé sur le modèle variables d'état	87
Figure 7.14 :	Angles obtenus par le MPC linéaire discret avec contraintes basé le modèle variables d'état	87
Figure 7.15:	Architecture d'asservissement pour une grue trois axes avec un compensateur prédictif non linéaire discret	88
Figure 7.16 :	Commandes obtenues par le MPC non linéaire discret.....	91
Figure 7.17:	Positions de la charge obtenues par le MPC non linéaire discret.....	91
Figure 7.18:	Angles obtenus par le MPC non linéaire discret.....	91
Figure 7.19 :	Commandes obtenues par le MPC non linéaire discret avec contraintes.....	92
Figure 7.20:	Positions de la charge obtenues MPC non linéaire discret avec contraintes.....	92
Figure 7.21:	Angles obtenus par le MPC non linéaire discret avec contraintes	92
Figure 8.1 :	Architecture d'asservissement pour une formation de satellites avec un compensateur prédictif basée sur le modèle de Lawden.....	94
Figure 8.2 :	Architecture d'asservissement pour une formation de satellites avec un compensateur prédictif basée sur le modèle de GVE linéarisées.....	97
Figure 8.3 :	Compensateur prédictif linéaire à paramètres variant discrets proposé basé sur le modèle de Lawden ou GVE linéarisées.....	100

Figure 8.4 :	Positions et vitesses relatives en fonction de l'horizon de prédiction obtenues par différentes méthodes de prédiction pour le modèle de Lawden	104
Figure 8.5 :	Différence des éléments d'orbite en fonction de l'horizon de prédiction obtenue par différentes méthodes de prédiction pour le modèle de GVE linéarisées	105
Figure 8.6 :	Projection de la fonction coût sur les contraintes d'entrées (exemple en deux dimensions).....	107
Figure 8.7 :	Projection de la fonction coût sur une approximation hyper-sphérique des contraintes d'entrées (exemple en deux dimensions).....	108
Figure 9.1 :	Simulateur non linéaire basé sur les architectures d'asservissement proposées au Chapitre 8.....	111
Figure 9.2 :	Pôles en boucle ouverte et fermée (trois MPC à PF pondérés différemment) du modèle de Lawden avec $e = 0.5$	117
Figure 9.3 :	Pôles en boucle ouverte et fermée (trois MPC à PF pondérés différemment) du modèle de Lawden avec $e = 0.7$	117
Figure 9.4 :	Pôles en boucle ouverte et fermée (trois MPC à PF pondérés différemment) du modèle de Lawden avec $e = 0.5$	117
Figure 9.5 :	Pôles en boucle ouverte et fermée (trois MPC à PV pondérés différemment) du modèle de Lawden avec $e = 0.7$	117
Figure 9.6 :	Somme des erreurs relatives absolues pour la simulation 1 avec le MPC de Lawden à POC, PF et PV	120
Figure 9.7 :	Somme des commandes absolues pour la simulation 1 avec le MPC de Lawden à POC, PF et PV	120
Figure 9.8 :	Somme des erreurs relatives absolues pour la simulation 3 avec le MPC de Lawden à POC, PF et PV	120
Figure 9.9 :	Somme des commandes absolues pour la simulation 3 avec le MPC de Lawden à POC, PF et PV	120
Figure 9.10 :	Somme des erreurs relatives absolues (en position et en vitesse) pour la simulation 5 avec le MPC de Lawden à POC, PF et PV	121
Figure 9.11 :	Somme des commandes absolues (en position et en vitesse) pour la simulation 5 avec le MPC de Lawden à POC, PF et PV	121

Figure 9.12 :	Somme des erreurs relatives absolues (en position et en vitesse) pour la simulation 7 avec le MPC de Lawden à POC, PF et PV	122
Figure 9.13 :	Somme des commandes absolues (en position et en vitesse) pour la simulation 7 avec le MPC de Lawden à POC, PF et PV	122
Figure 9.14 :	Comparaison de $u(k+l k)$ avec $u(k+l k+l)$ pour $l = 1...25$ aux environs du périégée pour la simulation 1 avec le MPC de Lawden à PF et PV	124
Figure 9.15 :	Comparaison de $u(k+l k)$ avec $u(k+l k+l)$ pour $l = 1...25$ aux environs du périégée pour la simulation 3 avec le MPC de Lawden à PF et PV	124
Figure 9.16 :	Comparaison de $u(k+l k)$ avec $u(k+l k+l)$ pour $l = 1...25$ aux environs du périégée pour la simulation 5 avec le MPC de Lawden à PF et PV	124
Figure 9.17 :	Comparaison de $u(k+l k)$ avec $u(k+l k+l)$ pour $l = 1...25$ aux environs du périégée pour la simulation 7 avec le MPC de Lawden à PF et PV	124
Figure 9.18 :	Somme de la fonction coût optimale locale, quasi-optimale globale et optimale globale pour la simulation 1 avec le MPC de Lawden à PF.....	126
Figure 9.19 :	Diagramme des phases en position obtenu de la simulation 1 avec le MPC de Lawden à PF.....	127
Figure 9.20 :	Erreurs relatives cartésiennes obtenues de la simulation 1 avec le MPC de Lawden à PF.....	128
Figure 9.21 :	Commandes obtenues de la simulation 1 avec le MPC de Lawden à PF	128
Figure 9.22 :	Diagramme des phases en position obtenu de la simulation 3 avec le MPC de Lawden à PV	129
Figure 9.23 :	Erreurs relatives catésiennes obtenues de la simulation 3 avec le MPC de Lawden à PV.....	129
Figure 9.24 :	Commandes obtenues de la simulation 3 avec le MPC de Lawden à PV.....	129
Figure 9.25 :	Diagramme des phases en position obtenu de la simulation 5 avec le MPC de Lawden à PF.....	130
Figure 9.26 :	Erreurs relatives cartésiennes obtenues de la simulation 5 avec le MPC de Lawden à PF.....	130
Figure 9.27 :	Commandes obtenues de la simulation 5 avec le MPC de Lawden à PF	130

Figure 9.28 :	Différence d'éléments d'orbite désirée pour la formation artificielle définie au Tableau 9.2 et au Tableau 9.5 sur une orbite d'excentricité de 0.5	132
Figure 9.29 :	Diagramme des phases en position obtenu de la simulation 9 avec le MPC de GVE linéarisées à PV	134
Figure 9.30 :	Erreurs relatives catésiennes obtenues de la simulation 9 avec le MPC de GVE linéarisées à PV	135
Figure 9.31 :	Erreurs en différence des éléments d'orbite obtenues de la simulation 9 avec le MPC de GVE linéarisées à PV	135
Figure 9.32 :	Commandes obtenues de la simulation 9 avec le MPC de GVE linéarisées à PV	135
Figure 9.33 :	Diagramme des phases en position obtenu de la simulation 11 avec le MPC de GVE linéarisées à PV	136
Figure 9.34 :	Erreurs relatives cartésiennes obtenues de la simulation 11 avec le MPC de GVE linéarisées à PV	137
Figure 9.35 :	Erreurs en différence des éléments d'orbite obtenues de la simulation 11 avec le MPC de GVE linéarisées à PV	137
Figure 9.36 :	Commandes obtenues de la simulation 11 avec le MPC de GVE linéarisées à PV	137
Figure 10.1 :	Résumé de la démarche utilisée dans ce travail de recherche incluant l'état de l'art et les contributions	142
Figure B.1 :	Repère a.....	147
Figure B.2 :	Représentation du vecteur v dans le repère a	148
Figure B.3 :	Repères a et b.....	149
Figure B.4 :	Rotation 1	151
Figure B.5 :	Rotation 2	151
Figure B.6 :	Rotation 3	151
Figure B.7 :	Rotation 3 de Ω du repère I au repère I'	152
Figure B.8 :	Rotation 1 de i du repère I' au repère I''	153
Figure B.9 :	Rotation 3 de u du repère I'' au repère O	153
Figure B.10 :	Représentation simplifiée d'une dérivée d'un vecteur tournant	154
Figure E.11:	Exemple d'un espace d'états à deux dimensions.....	177

Figure E.12:	Exemple de partitionnement d'un espace d'états selon l'algorithme proposé par Bemporad	178
Figure F.1 :	Représentation schématique de la grue trois axes.....	181
Figure F.2 :	Diagramme des corps libre de la masse	184
Figure F.3 :	Diagramme des corps libre du chariot.....	184
Figure F.4 :	Diagramme des corps libre du pont.....	185

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 2.1 :	Éléments d'orbite initiaux du satellite chef	22
Tableau 2.2 :	Positions et vitesses relatives initiales du satellite esclave	22
Tableau 2.3 :	Éléments d'orbite initiaux du satellite chef	25
Tableau 2.4 :	Positions et vitesses relatives initiales du satellite esclave	25
Tableau 2.5 :	Résumé des caractéristiques des modèles orbitaux relatifs	35
Tableau 7.1 :	Positions initiales de la charge sur grue trois axes	79
Tableau 7.2 :	Positions désirées de la charge sur grue trois axes	79
Tableau 7.3 :	Paramètres du compensateur prédictif linéaire discret fonction de transfert.....	79
Tableau 7.4 :	Paramètres du compensateur prédictif linéaire discret utilisant le modèle variables d'état.....	83
Tableau 7.5 :	Paramètres du compensateur prédictif non linéaire discret.....	90
Tableau 8.1 :	Éléments d'orbite initiaux du satellite chef	104
Tableau 8.2 :	Positions et vitesses relatives initiales du satellite esclave (définies à l'apogée).....	104
Tableau 9.1 :	Description des résultats et des analyses et présentés.....	115
Tableau 9.2 :	Éléments d'orbite initiaux du satellite chef	115
Tableau 9.3 :	Positions et vitesses relatives initiales du satellite esclave (définies au périgée)	115
Tableau 9.4 :	Positions et vitesses relatives naturelles désirées du satellite esclave (définies au périgée).....	116
Tableau 9.5 :	Positions et vitesses relatives artificielles désirées du satellite esclave.....	116
Tableau 9.6 :	Paramètres du compensateur prédictif linéaire à paramètres variant discret basé sur le modèle de Lawden	116
Tableau 9.7 :	Effort de commande et somme des erreurs relatives absolues (en position et en vitesse) pour des manœuvres sur des formations naturelles effectuées par le MPC de Lawden (dans le plan)	119

Tableau 9.8 :	Effort de commande et somme des erreurs relatives absolues (en position et en vitesse) pour des manœuvres sur des formations naturelles effectuées par le MPC de Lawden (hors du plan)	119
Tableau 9.9 :	Effort de commande et somme des erreurs relatives absolues (en position et en vitesse) pour des manœuvres sur des formations artificielles effectuées par le MPC de Lawden (dans le plan)	121
Tableau 9.10 :	Effort de commande et somme des erreurs relatives absolues (en position et en vitesse) pour des manœuvres sur des formations artificielles effectuées par le MPC de Lawden (hors du plan)	121
Tableau 9.11 :	Déviati on standard du bruit de mesure des états relatifs cartésiens sans et avec l'observateur	123
Tableau 9.12 :	Somme de la fonction coût optimale locale, quasi-optimale globale et optimale globale	126
Tableau 9.13 :	Positions et vitesses relatives initiales du satellite esclave (définies au périgée)	131
Tableau 9.14 :	Paramètres du compensateur prédictif lineaire à paramètres variant discret basé sur le modèle de GVE linéarisées	132
Tableau 9.15 :	Effort de commande, sommes des erreurs relatives absolues (en position, en vitesse et en différence des éléments d'orbite) pour des manœuvres sur une formation naturelle effectuées par le compensateur prédictif de GVE linéarisées	133
Tableau E.1 :	Table de simplex	170
Tableau E.2 :	Exemple de table de simplex pour λ^0	170
Tableau E.3 :	Exemple de table de simplex pour λ^1	171
Tableau F.4 :	Paramètres mécaniques de la grue trois axes	189

LISTE DES ALGORITHMES

Algorithme 2.1 :	Calcul d'une trajectoire relative en utilisant la solution homogène du modèle de Lawden	23
Algorithme 2.2 :	Calcul d'une trajectoire relative en utilisant la matrice d'états de transition de Schaub	32
Algorithme 7.1 :	Compensateur prédictif non linéaire discret pour la grue à trois axes	90
Algorithme 8.1 :	Correspondance non linéaire entre les éléments d'orbite d'un satellite et ses coordonnées inertielles	95
Algorithme 8.2 :	Génération de la trajectoire $r_{N12/k}^H$	96
Algorithme 8.3 :	Calcul de la position et vitesse inertielles du satellite esclave à partir de sa position et vitesse relatives et de la position et vitesse inertielles du satellite chef	98
Algorithme 8.4 :	Génération de la trajectoire $r_{N12/k}^e$	99
Algorithme 8.5 :	Algorithme d'optimisation basé sur la projection de la fonction coût	109
Algorithme 9.1 :	Calcul de la position et vitesse inertielles à partir de ses éléments d'orbite	113
Algorithme 9.2 :	Calcul de la position et vitesse relatives du satellite esclave dans le repère de Hill à partir de la position et la vitesse inertielles des satellites chef et esclave	114
Algorithme E.1 :	Programmation linéaire par la méthode du simplex	171
Algorithme E.2 :	Programmation quadratique par la méthode de l'ensemble actif	174
Algorithme E.3 :	Programmation quadratique par la méthode du point intérieur	176
Algorithme E.4 :	Programmation multiparamétriques par la méthode proposée par Bemporad	179

I. INTRODUCTION

CHAPITRE 1

Introduction

Les technologies spatiales évoluent actuellement vers la fabrication de plusieurs microsattellites autonomes volant en formation plutôt que vers la construction de gros satellites multimissions. Cette stratégie présente de nombreux avantages. Premièrement, elle permet d'accroître radicalement la précision et la résolution des mesures en corrélant les signaux provenant des instruments scientifiques des microsattellites de la formation. Cette antenne synthétique de grande ouverture serait impossible à déployer avec un seul satellite. En fait, cela nécessiterait une structure énorme très coûteuse à lancer. Deuxièmement, le vol en formation permet de modifier facilement la configuration géométrique des instruments en fonction de la nature des mesures à prendre. Troisièmement, cette stratégie permet de diminuer considérablement les coûts de conception des satellites. En effet, les multiples instruments utilisés lors d'une mission spatiale exigent des conditions d'opération souvent concurrentes et parfois même conflictuelles. Cette réalité rend la conception des satellites monolithiques très laborieuse et allonge les délais de livraison. Cela peut être évité en distribuant adéquatement les instruments sur une formation de satellites. Finalement, cette stratégie diminue grandement les risques d'échec des missions spatiales puisqu'un satellite de la formation peut cesser de fonctionner sans nécessairement compromettre la mission entière.

Cependant, pour profiter de tous ces avantages, des lois de commande optimales (au sens du temps et du coût en propergol) et autonomes qui permettent de maintenir et de reconfigurer une formation doivent être développées. L'autonomie est un aspect important du vol en formation. En effet, la complexité de ces missions ne permet pas de faire intervenir un centre de contrôle terrestre pour contrôler les actionneurs des satellites en temps réel. Ces opérations de base doivent être assurées automatiquement par l'ordinateur de bord des satellites. Pour ce faire, les lois de commande utilisées doivent d'être simples étant donné la puissance de calcul disponible limitée et stables pour minimiser les risques d'échecs des missions.

Ce mémoire porte sur le développement d'un Compensateur Prédicatif basé sur le Modèle (MPC) autonome pour le vol en formation sur une orbite d'excentricité élevée basée sur le modèle de

Lawden et le modèle GVE linéarisées (Équations de Variation de Gauss linéarisées). Les précédentes approches basées sur un compensateur prédictif reposaient sur l'optimisation de l'effort de commande en utilisant un algorithme complexe et non autonome pour maintenir l'erreur de position relative des satellites de la formation dans un intervalle défini par les opérateurs. La technique propose plutôt de minimiser une fonction coût incluant directement l'erreur relative future. Cette alternative permet de considérer seulement les contraintes sur les actionneurs. La commande optimale est obtenue avec un algorithme explicite basé sur la projection de la fonction coût sur les contraintes, permettant ainsi de réduire considérablement le temps de calcul. La loi de commande autonome proposée permet des manœuvres de reconfiguration et de maintenance d'une formation avec de bonnes performances.

Ce mémoire est divisé en dix chapitres organisés dans quatre sections. La première section est une revue de l'état de l'art. Celle-ci présente les bases mathématiques et théoriques de ce travail de recherche en mettant en évidence les principaux auteurs ayant contribué dans le domaine du vol en formation et de l'asservissement de systèmes en utilisant des lois de commande prédictives. Cette section contient quatre chapitres présentés à la Figure 1.1.

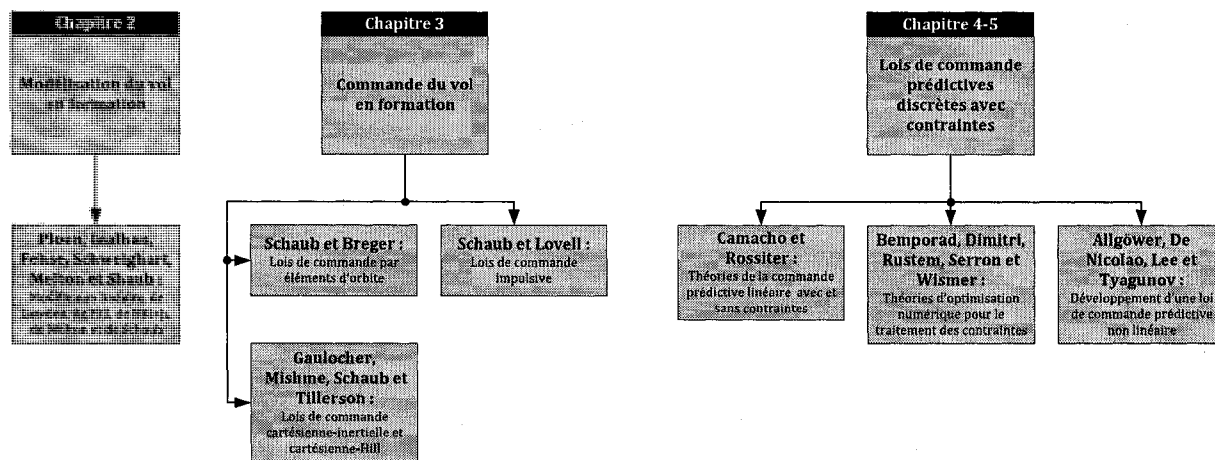


Figure 1.1 : Organisation de l'état de l'art

En fait, le Chapitre 2 traite de la dynamique orbitale absolue et relative nécessaire à la conception de lois de commande ou de guidage de formations de satellites. Le Chapitre 3 porte sur des lois de commandes adaptées au vol en formation étudiées par le candidat. Cela permet de mettre en évidence les différentes architectures d'asservissement utilisables et de justifier les avantages de l'utilisation de compensateurs prédictifs. Cependant, ce chapitre ne se veut pas un résumé exhaustif de toutes les approches existantes. Enfin, les Chapitres 4 et 5 expliquent respectivement en quoi consistent les lois de commande prédictives discrètes linéaires et non linéaires.

La deuxième section contient seulement le Chapitre 6. Ce dernier concerne les objectifs et la méthodologie de ce projet de recherche.

La troisième section, constituée de trois chapitres, résume le processus de développement de la loi de commande prédictive pour les formations de satellites. En fait, dans le Chapitre 7, les techniques prédictives, expliquées dans l'état de l'art, sont appliquées sur une grue trois axes de manière à démontrer leur fonctionnement sur un système simple et à converger vers celles qui semblent les mieux adaptées aux formations de satellites. Dans le Chapitre 8, les architectures d'asservissement et les lois de commande prédictives proposées par l'auteur pour asservir une formation de satellites sur une orbite excentrique y sont expliquées. Enfin, dans le Chapitre 9, les résultats de simulation sont présentés. Ce dernier explique la structure du simulateur non linéaire développé par l'auteur pour mettre à l'épreuve les lois de commande proposées dans le Chapitre 8. De plus, les performances de celles-ci sont démontrées et sont comparées entre elles.

Finalement, la dernière et quatrième section est la conclusion. Un bref résumé des lois de commande proposées, une critique de ces dernières et une synthèse des innovations de ce projet de recherche y sont présentés.

II. ÉTAT DE L'ART

CHAPITRE 2

Modélisation d'une formation de satellites

Les scientifiques dans le domaine de l'aérospatiale et plus particulièrement dans celui du vol en formation de satellites ont publié plusieurs ouvrages concernant la mise en équations du mouvement orbital relatif. Leurs objectifs étaient, et sont encore aujourd'hui, d'obtenir des équations dynamiques simples, possédant une solution homogène analytique, modélisant les orbites elliptiques et incluant les principales perturbations telles la trainée aérodynamique et les perturbations gravitationnelles. Ces défis ont donné naissance à plusieurs théories dont les plus importantes sont résumées dans ce chapitre. En fait, ce dernier débute par la présentation des systèmes de repères dans lesquels s'expriment les équations dynamiques. Par la suite, les dynamiques orbitales cartésiennes et par éléments d'orbite y sont expliquées. Ensuite, les différents modèles décrivant le mouvement relatif sont démontrés. Enfin, le chapitre se termine en montrant les types de formations les plus utilisés.

2.1. Système de repères

Avant de débiter la mise en équation de la dynamique orbitale d'un satellite et d'une formation de satellites, il est nécessaire d'établir et d'expliquer les systèmes de repères dans lesquels les équations dynamiques vectorielles peuvent être exprimées. Le document de (de Lafontaine 2003) présente ceux généralement utilisés. Les paragraphes qui suivent utilisent la théorie des vectrices et les mathématiques vectorielles de base, pour plus de détails sur ce sujet voir l'annexe A.

Le premier repère est le repère inertiel identifié par la vectrice $\vec{\mathfrak{I}}_I = [\vec{I}_x, \vec{I}_y, \vec{I}_z]^T$. Il est inertiellement fixe et son origine est le centre de la Terre. Il est souvent désigné par « Earth Centred Inertial (ECI) ». Le vecteur unitaire \vec{I}_x pointe vers l'équinoxe du printemps, le vecteur \vec{I}_z pointe vers le pôle Nord et enfin $\vec{I}_y = \vec{I}_z \times \vec{I}_x$.

Le deuxième repère est le repère orbital identifié par la vectrice $\vec{\mathfrak{O}}_O = [\vec{O}_r, \vec{O}_\theta, \vec{O}_n]^T$. Son origine est également le centre de la Terre. Cependant, le vecteur radial \vec{O}_r pointe vers le satellite, le vecteur normal \vec{O}_n est normal au plan de l'orbite et le vecteur transversal correspond à $\vec{O}_\theta = \vec{O}_n \times \vec{O}_r$.

Les repères inertiel et orbital sont illustrés à la figure 2.1,

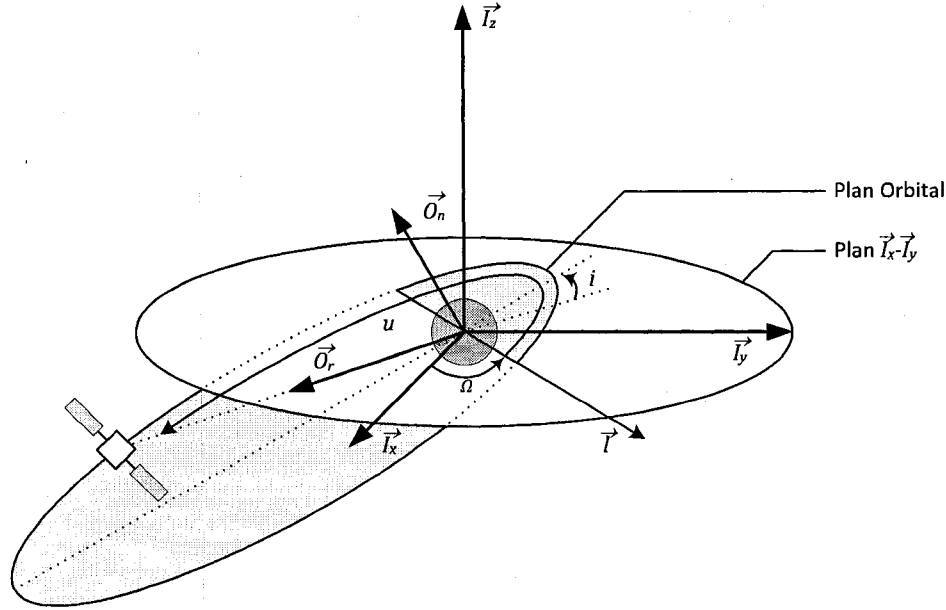


Figure 2.1 : Repères utilisés pour décrire le mouvement d'un satellite en orbite

où :

- le vecteur \vec{l} est la ligne des nœuds, l'orientation de ce vecteur est défini par la droite formée par l'intersection du plan orbital et du plan équatorial formé par l'axe \vec{I}_x et \vec{I}_y ;
- l'angle i est l'inclinaison, soit l'angle entre le plan orbital et le plan équatorial;
- l'angle Ω est l'ascension droite du nœud ascendant;
- l'angle u est l'argument de latitude du satellite, soit l'angle entre le nœud ascendant et la position du satellite.

Le repère $\vec{\mathcal{S}}_0$ est obtenu de $\vec{\mathcal{S}}_i$ par une rotation 3-1-3 des angles Ω , i et u . La matrice de cosinus directeurs qui définit $\vec{\mathcal{S}}_0$ par rapport $\vec{\mathcal{S}}_i$ est montrée à l'équation suivante :

$$C_{0i} = \begin{bmatrix} \cos(u) \cos(\Omega) - \sin(u) \sin(\Omega) \cos(i) & \cos(u) \sin(\Omega) + \sin(u) \cos(\Omega) \cos(i) & \sin(u) \sin(i) \\ -\sin(u) \cos(\Omega) - \cos(u) \sin(\Omega) \cos(i) & -\sin(u) \sin(\Omega) + \cos(u) \cos(\Omega) \cos(i) & \cos(u) \sin(i) \\ \sin(\Omega) \sin(i) & -\cos(\Omega) \sin(i) & \cos(i) \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Avec ce résultat, un vecteur \vec{u} quelconque dont les composantes sont définies dans $\vec{\mathcal{S}}_i$ peut être exprimé par rapport à $\vec{\mathcal{S}}_0$ et vice versa en utilisant ces relations mathématiques :

$$\begin{aligned} \vec{u}^0 &= C_{0i} \vec{u}^i \\ \vec{u}^i &= C_{0i}^T \vec{u}^0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

De la même manière, la dérivée par rapport au temps de ce même vecteur peut être transformée d'un repère à l'autre :

$$\begin{aligned} \dot{\vec{u}}^0 &= C_{0i} (\dot{\vec{u}}^i - (\omega_{0i}^i)^{\times} \vec{u}^i) \\ \dot{\vec{u}}^i &= C_{0i}^T (\dot{\vec{u}}^0 + (\omega_{0i}^0)^{\times} \vec{u}^0) \end{aligned} \quad (2.3)$$

où ω_{OI}^O et ω_{OI}^I sont définis par :

$$\omega_{OI}^O = \begin{bmatrix} \dot{\Omega} \sin(i) \cos(u) + \dot{i} \cos(u) \\ \dot{\Omega} \sin(i) \cos(u) - \dot{i} \sin(u) \\ \dot{\Omega} \cos(i) + \dot{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_r \\ \omega_\theta \\ \omega_n \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

$$\omega_{OI}^I = C_{OI}^T \omega_{OI}^O$$

où $\dot{\Omega}$, \dot{i} et \dot{u} sont respectivement la variation par rapport au temps des angles Ω , i et u .

Finalement, le troisième repère est le repère Local Horizontal, Local Vertical (LVLH) communément nommé repère de Hill, identifié par la vectrice $\vec{\mathcal{S}}_H = [\vec{x} \ \vec{y} \ \vec{z}]$. Celui-ci est centré sur le satellite et est souvent utilisé pour positionner un satellite par rapport à un autre. Le vecteur unitaire \vec{x} de ce repère est parallèle au vecteur radial \vec{O}_r , \vec{y} est parallèle à \vec{O}_θ et enfin \vec{z} est parallèle à \vec{O}_n . La figure 2.2 illustre ce dernier.

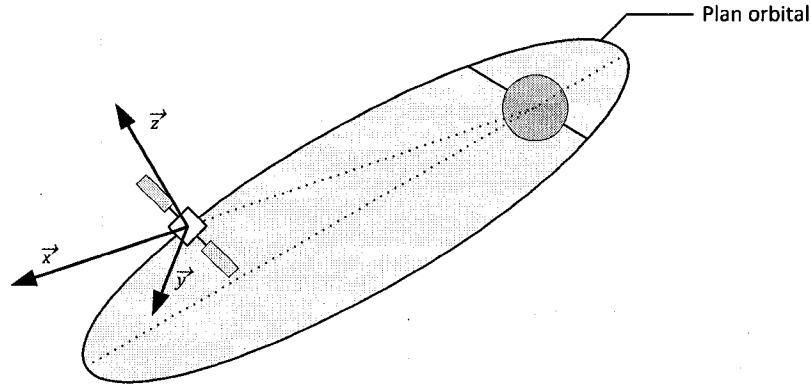


Figure 2.2 : Repère de Hill

Un vecteur \vec{u} quelconque exprimé $\vec{\mathcal{S}}_I$ peut être transformé dans $\vec{\mathcal{S}}_H$ et vice versa :

$$\begin{aligned} \vec{u}^H &= C_{OI}(\vec{u}^I - \vec{r}^I) \\ \vec{u}^I &= \vec{r}^I + C_{OI}^T \vec{u}^H \end{aligned} \quad (2.5)$$

où \vec{r}^I est la position inertielle du satellite par rapport au centre de la Terre. Les mêmes transformations peuvent être effectuées pour le vecteur vitesse \vec{u} :

$$\begin{aligned} \dot{\vec{u}}^H &= C_{OI}(\dot{\vec{u}}^I - \dot{\vec{r}}^I - (\omega_{OI}^I)^\times \vec{u}^I) \\ \dot{\vec{u}}^I &= \dot{\vec{r}}^I + C_{OI}^T(\dot{\vec{u}}^H + (\omega_{OI}^O)^\times \vec{u}^H) \end{aligned} \quad (2.6)$$

où $\dot{\vec{r}}^I$ est la vitesse inertielle du satellite. Pour plus détails sur les mathématiques vectorielles, voir l'annexe A.

2.2. Dynamique orbitale cartésienne

L'équation différentielle vectorielle de la dynamique orbitale est exprimée par :

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{f}_g(\vec{r}) + \vec{f}_p \quad (2.7)$$

où $\ddot{\vec{r}}$ est l'accélération du satellite dans le repère $\vec{\mathcal{S}}_I$, $\vec{f}_g(\vec{r}) = -\mu/r^3 \vec{r}$ est l'accélération gravitationnelle définie par la loi de Newton, l'accélération \vec{f}_p correspond aux perturbations orbitales,

μ est le paramètre gravitationnel de la Terre et enfin $r = \|\vec{r}\|$ correspond à l'altitude du satellite par rapport au centre de la Terre. Pour obtenir la solution homogène de cette équation, il faut débiter par l'utilisation de la théorie de la cinématique des vectrices, présentée à l'annexe A, de manière à obtenir l'expression de $\ddot{\vec{r}}$ dans le repère $\vec{\mathcal{S}}_O$:

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}} + 2\vec{\omega}_{OI} \times \dot{\vec{r}} + \vec{\omega}_{OI} \times (\vec{\omega}_{OI} \times \vec{r}) + \ddot{\vec{\omega}}_{OI} \times \vec{r} \quad (2.8)$$

où $(\dot{})$ et $(\ddot{})$ représente respectivement une dérivée de première et deuxième ordre évaluée dans le repère $\vec{\mathcal{S}}_O$. Par la suite, la même transformation doit être effectuée pour le terme de droite de l'équation (2.7) :

$$\vec{f}_g(\vec{r}) + \frac{\vec{f}_p}{m} = -\frac{\mu}{r^2} \vec{O}_r + f_{p,r} \vec{O}_r + f_{p,\theta} \vec{O}_\theta + f_{p,n} \vec{O}_n \quad (2.9)$$

où les accélérations $f_{p,r}$, $f_{p,n}$ et $f_{p,\theta}$ correspondent respectivement aux perturbations radiales (dirigées vers le centre de la Terre), normales au plan orbital et perpendiculaires aux deux précédentes. En remplaçant l'équation (2.8) et (2.9) dans (2.7) et en prenant le produit scalaire $\vec{\mathcal{S}}_O \cdot ()$, il est possible d'obtenir la version composante de la dynamique d'un satellite :

$$\ddot{r}^O + 2(\omega_{OI}^O)^\times \dot{r}^O + (\omega_{OI}^O)^\times ((\omega_{OI}^O)^\times r^O) + (\dot{\omega}_{OI}^O)^\times r^O = f_g^O + f_p^O \quad (2.10)$$

où $()^\times$ est la matrice croisée, définie à l'annexe A, des composantes du vecteur dans la parenthèse, ω_{OI}^O correspond aux composantes de la vitesse angulaire exprimées dans le repère $\vec{\mathcal{S}}_O$, montrée à l'équation (2.4) et \ddot{r}^O , \dot{r}^O , r^O sont définis par :

$$\begin{aligned} \ddot{r}^O &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \ddot{r} & \dot{r}^O &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{r} \\ r^O &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r \end{aligned} \quad (2.11)$$

En substituant les équations (2.4) et (2.11) dans l'équation (2.10), l'équation suivante est obtenue :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \ddot{r} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_n \\ -\omega_t \end{bmatrix} \dot{r} + \begin{bmatrix} -(\omega_t^2 + \omega_n^2) \\ \omega_r \omega_\theta + \dot{\omega}_n \\ \omega_r \omega_n - \dot{\omega}_\theta \end{bmatrix} r = \begin{bmatrix} -\frac{\mu}{r^2} + f_{p,r} \\ f_{p,\theta} \\ f_{p,n} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

En procédant de la même manière, il est possible de définir vitesse, notée \vec{v} , du satellite. En effet, la dérivée de \vec{r} par rapport au temps évaluée dans $\vec{\mathcal{S}}_I$ peut s'exprimer en fonction de la vitesse mesurée dans le repère $\vec{\mathcal{S}}_O$ et de la position du satellite :

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}} + \vec{\omega}_{OI} \times \vec{r} \quad (2.13)$$

En prenant le produit scalaire $\vec{\mathcal{S}}_O \cdot ()$, il est possible d'obtenir la version composante de la vitesse du satellite :

$$\vec{v}^O = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ r\omega_n \\ -r\omega_\theta \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Il aussi est utile de définir la quantité de mouvement angulaire du satellite exprimée dans le repère orbital :

$$\mathbf{h}^O = (\mathbf{r}^O) \times \mathbf{v}^O = \begin{bmatrix} 0 \\ r^2 \omega_\theta \\ r^2 \omega_n \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

En considérant une orbite Képlérienne non perturbée, c'est-à-dire que $f_{p,r} = f_{p,\theta} = f_{p,n} = 0$ et donc que $\omega_r = \omega_\theta = 0$, et $\omega_n = \dot{u} = \sqrt{\mu/r^3}$, les équations (2.12), (2.14) et (2.15) deviennent :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \ddot{r} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{u} \\ 0 \end{bmatrix} \dot{r} + \begin{bmatrix} -\dot{u}^2 \\ \ddot{u} \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{r} = \begin{bmatrix} -\frac{\mu}{r^2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

$$\mathbf{v}^O = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ r\dot{u} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

$$\mathbf{h}^O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r^2 \dot{u} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

En intégrant l'équation (2.16), il est facile d'obtenir la trajectoire d'un satellite exprimée en coordonnées polaires :

$$r = \frac{h^2/\mu}{1 + e \cos(u - \omega)} \quad (2.19)$$

où h est le module de \mathbf{h}^O , e et ω sont des constantes d'intégration qui correspondent respectivement à l'excentricité de l'orbite et à l'argument du périégée. Il est à noter que le sens physique de ces constantes est expliqué plus loin. En prenant le module de l'équation (2.17), il possible de définir la vitesse du satellite, voir l'équation (2.20),

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} \quad (2.20)$$

où $v_r = \dot{r} = \mu e \sin(u - \omega) / h$ est la vitesse radiale du satellite obtenue en prenant la dérivée par rapport au temps de l'équation (2.19) et $v_\theta = r\dot{u} = \mu(1 + e \cos(u - \omega)) / h$ est la vitesse transversale du satellite. En considérant que $0 \leq e < 1$, l'équation (2.19) démontre qu'un satellite en orbite suit une trajectoire elliptique toujours dans le même plan et se déplace à une vitesse définie par l'équation (2.20), comme le montre la figure 2.3.

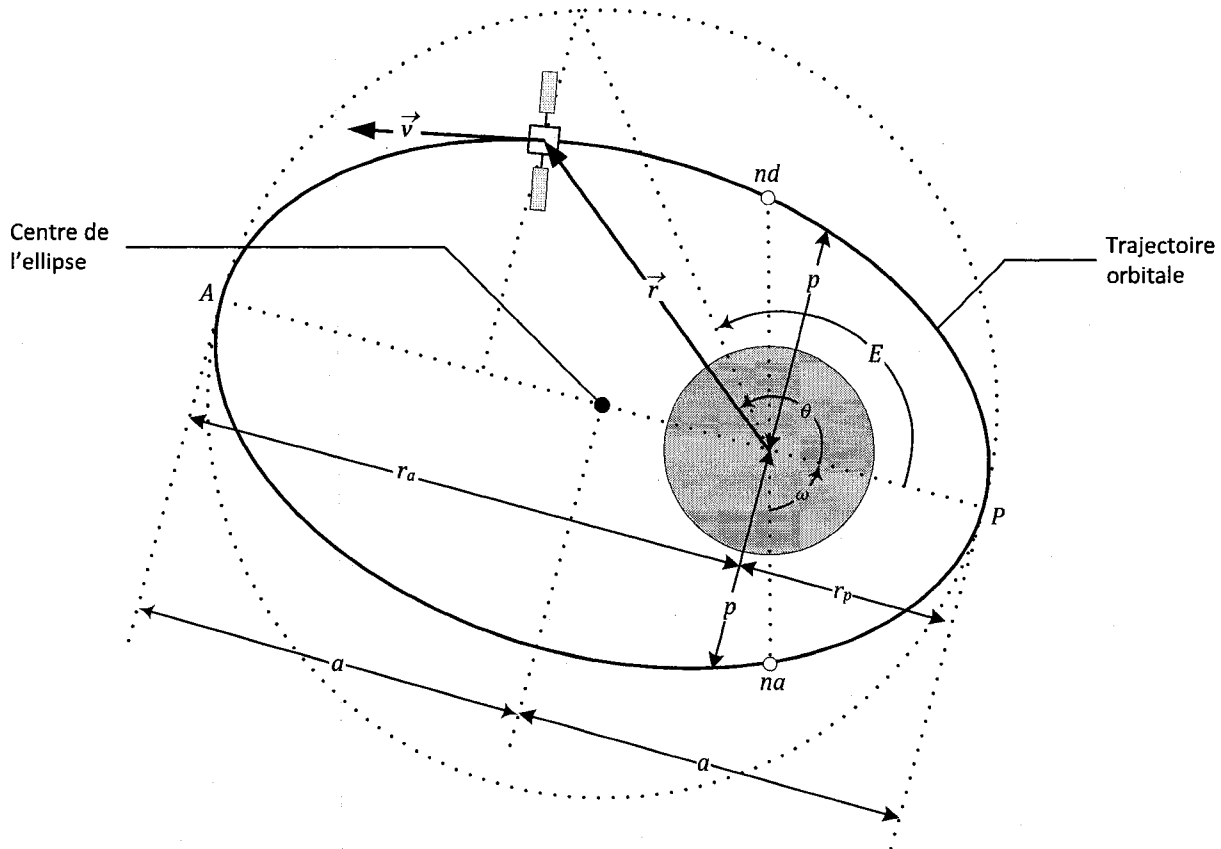


Figure 2.3 : Paramètres du plan orbital

Les paramètres qui apparaissent sur la figure permettent de décrire la trajectoire et la position d'un satellite en orbite. Ceux-ci ont été établis par Kepler et ils sont présentés dans le volume de (Bate 1971). Le paragraphe qui suit les décrit brièvement et montre à quoi ils correspondent mathématiquement.

A : L'apogée est le rayon orbital du satellite le plus élevé.

P : Le périhélie est le rayon orbital du satellite le plus bas.

a : L'axe semi-majeur est la demi-distance représentée par la droite qui relie l'apogée au périhélie.

e : L'excentricité de l'orbite est un paramètre qui s'exprime en fonction de r_a et r_p :

$$e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} \quad (2.21)$$

p : Le semi-latus rectum est un paramètre défini fonction de h et μ ou de a et e :

$$p = \frac{h^2}{\mu} = a(1 - e^2) \quad (2.22)$$

r_a : Ce paramètre correspond à la distance entre le centre de la Terre et l'apogée. Celui-ci peut être calculé en utilisant les valeurs de p et e ou de a et e :

$$r_a = \frac{p}{1 - e} = a(1 + e) \quad (2.23)$$

r_p : Ce paramètre correspond à la distance entre le centre de la Terre et le périégée. Celui-ci dépend des mêmes paramètres que r_a :

$$r_p = \frac{p}{1+e} = a(1-e) \quad (2.24)$$

na et nd : Les nœuds ascendant et descendant sont respectivement les points de l'orbite où le satellite croise le plan équatorial du sud vers le nord et du nord vers le sud.

ω : L'argument de latitude du périégée est l'angle entre le nœud ascendant de l'orbite et le périégée mesuré dans le plan orbital.

θ : L'anomalie vraie est la position angulaire du satellite mesurée à partir du périégée

E : L'anomalie excentrique est un paramètre qui permet de calculer le rayon de l'orbite r facilement lorsque l'axe semi-majeur et l'excentricité sont connus :

$$r = a(1 - e \cos E) \quad (2.25)$$

En plus, de caractériser une orbite, Kepler a développé quelques équations qui permettent de relier le temps à l'anomalie vraie. Celles-ci sont présentées dans les volumes de (Bate 1971; Vallado 2001). Avec ces équations, il est possible de déterminer le temps de vol d'un satellite à partir de l'anomalie vraie. Pour ce faire, il faut utiliser les équations (2.26), (2.27) ou (2.28), pour déterminer l'anomalie excentrique à partir de l'anomalie vraie.

$$\sin E = \frac{\sqrt{1+e^2} \sin \theta}{1+e \cos \theta} \quad (2.26)$$

$$\cos E = \frac{\cos \theta + e}{1+e \cos \theta} \quad (2.27)$$

$$\tan\left(\frac{E}{2}\right) = \frac{\sqrt{1-e}}{\sqrt{1+e}} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (2.28)$$

Par la suite, il faut calculer l'anomalie moyenne, notée M , à l'aide de l'équation de Kepler :

$$M = E + \sin E \quad (2.29)$$

Finalement, il reste seulement à calculer le temps t de vol en utilisant l'équation suivante :

$$M = n(t - t_0) \quad (2.30)$$

où n est la vitesse angulaire moyenne du satellite définie à l'équation (2.31) et t_0 est le temps lors de son passage au périégée.

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \quad (2.31)$$

Il est aussi très utile de faire la procédure inverse, c'est-à-dire de calculer l'anomalie vraie en fonction du temps. Cependant, cette tâche est plus complexe. Il faut commencer par calculer M à partir de t avec l'équation (2.30). Par la suite, il faut trouver E avec M . Cependant, l'équation (2.29) est transcendante, c'est-à-dire que M peut être calculée analytiquement à partir de E , mais il est impossible de le faire en solutionnant l'équation pour E . (Vallado 2001) expose donc quelques

techniques approximatives pour y arriver. La première propose d'utiliser une décomposition par séries en appliquant l'équation suivante :

$$E = M + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kM)}{k} J_k(k, e) \quad (2.32)$$

où $J_k(k, e)$ est défini par :

$$J_k(k, e) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! (k+j)!} \left(\frac{ke}{2}\right)^{k+2j} \quad (2.33)$$

si $k > 0$, $j = 0, 1, 2, \dots$
si $k < 0$, $j = -k, -k+1, -k+2, \dots$

La deuxième technique, plus classique, implique l'algorithme itératif de Newton-Raphson :

$$E_{n+1} = E_n + \frac{M - E_n + e \sin E_n}{1 - e \cos E_n} \quad (2.34)$$

(Vallado 2001) propose d'utiliser $E_0 = M + e$ si $0 < M < \pi$ et $E_0 = M - e$ sinon, comme valeur initiale pour assurer la convergence. Finalement, il ne reste qu'à appliquer l'équation (2.35), (2.36) ou (2.37) afin de calculer l'anomalie vraie à partir de l'anomalie excentrique.

$$\cos \theta = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E} \quad (2.35)$$

$$\sin \theta = \frac{\sin E \sqrt{1 - e^2}}{1 - e \cos E} \quad (2.36)$$

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sqrt{1+e}}{\sqrt{1-e}} \tan\left(\frac{E}{2}\right) \quad (2.37)$$

2.3. Dynamique orbitale par éléments d'orbite

La dynamique d'un satellite peut aussi être décrite en utilisant les éléments d'orbite, soit l'axe semi-majeur, l'excentricité, l'inclinaison, l'ascension droite du nœud ascendant, l'argument du périégée et l'anomalie moyenne initiale définis précédemment. Ceux-ci sont souvent présentés sous forme de vecteur d'états :

$$e = [a \ M \ i \ e \ \omega \ \Omega]^T \quad (2.38)$$

La dynamique orbitale qui utilise ce vecteur d'états repose sur les Équations de Variation de Gauss (GVE), présentées dans le volume de (Schaub et Junkins 2003) et reportées à l'équation ci-dessous :

$$\frac{de}{dt} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{A_{GVE}^e(e)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{2a^2 e \sin \theta}{h} & \frac{2a^2 p}{hr} & 0 \\ \frac{\eta(p \cos \theta - 2re)}{he} & -\frac{\eta(p+r) \sin \theta}{he} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r \cos u}{h} \\ \frac{p \sin \theta}{h} & \frac{(p+r) \cos \theta + re}{h} & 0 \\ \frac{p \cos \theta}{he} & \frac{(p+r) \sin \theta}{he} & \frac{r \sin u}{h \tan i} \\ 0 & 0 & \frac{r \sin u}{h \sin i} \end{bmatrix}}_{B_{GVE}^e(e)} \begin{bmatrix} f_{p,r} \\ f_{p,\theta} \\ f_{p,n} \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

où $\eta = \sqrt{1 - e^2}$. La démonstration de ces équations est présentée à l'annexe B.

2.4. Dynamique orbitale relative cartésienne

La dynamique orbitale relative correspond aux équations décrivant le comportement d'un vecteur \vec{d} qui situe un satellite esclave par rapport un satellite chef ou une orbite de référence. La situation est décrite à la Figure 2.4.

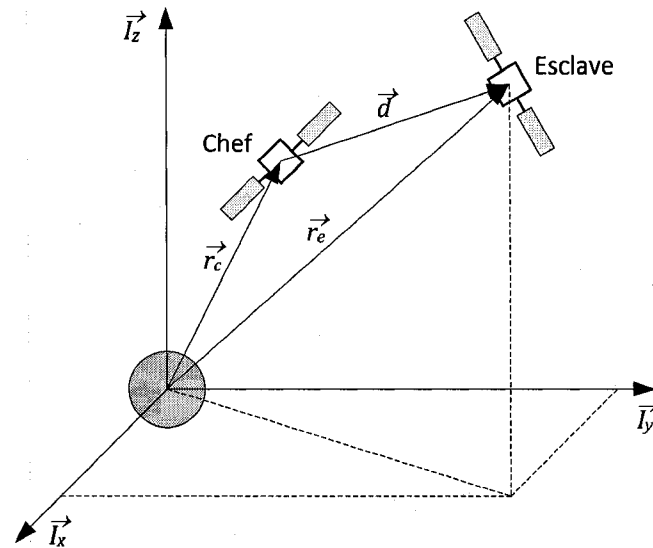


Figure 2.4 : Formation de deux satellites de type chef-esclave

Dans la littérature scientifique, plusieurs auteurs ont tenté de décrire mathématiquement ce système en considérant l'excentricité de l'orbite de référence ainsi que les perturbations importantes telles que la non-uniformité du champ gravitationnel de la Terre et la traînée aérodynamique due aux impacts des particules de la haute atmosphère sur la structure du satellite. Les scientifiques, pour la plupart, orientent leurs travaux sur l'obtention d'une solution simple et analytique impliquant l'utilisation d'équations dynamiques linéaires.

Le schéma de la figure 2.5 montre les auteurs et leurs théories les plus importantes. Les zones colorées regroupent les articles selon l'excentricité de l'orbite de référence utilisée. Les théories qui décrivent le mouvement relatif sur une orbite circulaire ($e = 0$) et quelconque ($0 \leq e < 1$) sont respectivement contenus dans les zones verte et rouge. Chacune des boîtes représente un article et les flèches les liens qui les unissent. Ces articles sont résumés dans les paragraphes qui suivent.

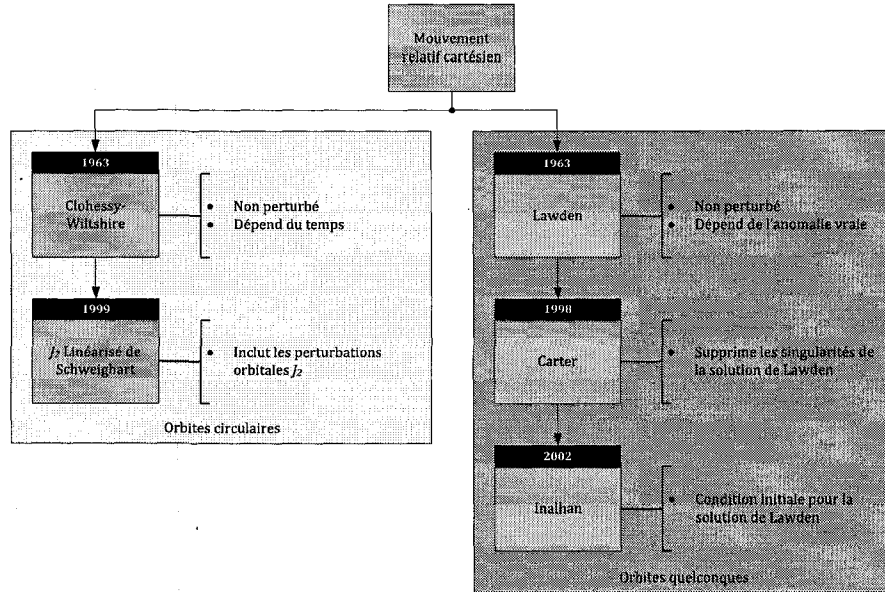


Figure 2.5 : Organigramme de la théorie concernant la modélisation du mouvement orbital relatif cartésien

2.4.1. Modèle non linéaire

Il est important de comprendre que toutes les théories présentées à la figure 2.5 découlent de l'étude de la dynamique exacte et non linéaire du mouvement relatif. Dans l'article de (Ploen, Scarf et al. 2004), la dynamique non linéaire du mouvement relatif est démontrée. Cette section présente les grandes lignes de cette démonstration.

En se basant sur les explications de la Section 2.2, il est possible d'établir la dynamique du satellite sur l'orbite de référence perturbée :

$$\ddot{\vec{r}}_c = \vec{f}_g(\vec{r}_c) + \vec{f}_{p,c} \quad (2.40)$$

De la même manière, il est possible de définir l'équation dynamique du satellite esclave, sachant que celui-ci est soumis, en plus de l'accélération due aux perturbations, à une force de commande qui lui permet de maintenir sa position relative par rapport à l'orbite de référence (satellite chef) :

$$\ddot{\vec{r}}_e = \vec{f}_g(\vec{r}_e) + \vec{f}_{p,e} + \frac{\vec{u}}{m} \quad (2.41)$$

où m est la masse du satellite esclave. La position relative du satellite esclave, notée \vec{d} et présentée à la figure 2.4, s'exprime mathématiquement comme le montre l'équation suivante :

$$\vec{d} = \vec{r}_e - \vec{r}_c \quad (2.42)$$

En dérivant deux fois le vecteur \vec{d} , il est possible d'obtenir l'accélération relative :

$$\ddot{\vec{d}} = \ddot{\vec{r}}_e - \ddot{\vec{r}}_c \quad (2.43)$$

En substituant les équations (2.40) et (2.41), l'équation (2.43) devient :

$$\ddot{\vec{d}} = \vec{f}_g(\vec{r}_e) - \vec{f}_g(\vec{r}_c) + \vec{f}_{p,e} - \vec{f}_{p,c} + \frac{\vec{u}}{m} \quad (2.44)$$

En utilisant la théorie de la cinématique des repères tournants, le vecteur \vec{d} peut être exprimé en fonction de $\ddot{\vec{d}}$, $\dot{\vec{d}}$, $\vec{\omega}_{OI}$ et $\vec{\omega}_{OI}$, c'est-à-dire les dérivées deuxième et première du vecteur \vec{d} dans le repère $\vec{\mathcal{S}}_H$ et l'accélération ainsi que la vitesse angulaire du repère $\vec{\mathcal{S}}_H$ par rapport à $\vec{\mathcal{S}}_I$. L'équation (2.44) devient alors :

$$\ddot{\vec{d}} + 2\vec{\omega}_{OI} \times \dot{\vec{d}} + \vec{\omega}_{OI} \times (\vec{\omega}_{OI} \times \vec{d}) + \ddot{\vec{\omega}}_{OI} \times \vec{d} = \vec{f}_g(\vec{r}_e) - \vec{f}_g(\vec{r}_c) + \vec{f}_{p,e} - \vec{f}_{p,c} + \frac{\vec{u}}{m} \quad (2.45)$$

Cette équation ne possède pas de solution analytique du fait qu'elle est non linéaire et à paramètres variant dans le temps. Cependant, plusieurs solutions approximatives ont été développées. Celles-ci sont présentées dans les prochaines sections.

2.4.2. Modèle de Lawden

Le modèle de Lawden permet d'obtenir une solution analytique du mouvement relatif sur orbite elliptique non perturbée. Cependant, cette solution dépend de l'anomalie vraie. La solution obtenue par Lawden a été améliorée par Carter qui proposait une alternative pour éliminer les singularités. Tous ces résultats sont présentés dans l'article de (Inalhan 2002). Ils sont résumés brièvement dans les paragraphes qui suivent.

Le modèle de Lawden est basé sur la version linéarisée de l'équation (2.45) en considérant que les perturbations sont nulles. Pour se faire, il faut effectuer un développement limité de $f_g(\vec{r}_e)$ autour de l'orbite de référence en utilisant l'expansion par une série de Taylor :

$$\vec{f}_g(\vec{r}_e) \approx \vec{f}_g(\vec{r}_c) + \nabla \vec{f}_g(\vec{r}_c) \cdot \vec{d} \quad (2.46)$$

En soustrayant $\vec{f}_g(\vec{r}_c)$ des deux côtés, l'équation suivante est obtenue :

$$\vec{f}_g(\vec{r}_e) - \vec{f}_g(\vec{r}_c) \approx \nabla \vec{f}_g(\vec{r}_c) \cdot \vec{d} \quad (2.47)$$

En substituant l'équation (2.47) dans l'équation (2.45) sachant que $\vec{f}_{p,e} = \vec{f}_{p,c} = 0$, il est possible d'obtenir :

$$\ddot{\vec{d}} + 2\vec{\omega}_{OI} \times \dot{\vec{d}} + \vec{\omega}_{OI} \times (\vec{\omega}_{OI} \times \vec{d}) + \ddot{\vec{\omega}}_{OI} \times \vec{d} = \nabla \vec{f}_g(\vec{r}_c) \cdot \vec{d} + \frac{\vec{u}}{m} \quad (2.48)$$

La version composante de cette équation dynamique peut être obtenue en prenant le produit scalaire $\vec{\mathcal{S}}_H \cdot ()$:

$$\ddot{d}^H + 2(\omega_{OI}^H)^\times \dot{d}^H + (\omega_{OI}^H)^\times ((\omega_{OI}^H)^\times d^H) + (\ddot{\omega}_{OI}^H)^\times d^H = \nabla f_g^H(r_c^H) d^H + \frac{u^H}{m} \quad (2.49)$$

où chacun des termes de l'équation est défini par :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}^H &= \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} & \mathbf{d}^H &= \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} \\
 \ddot{\mathbf{a}}^H &= \begin{bmatrix} \ddot{\ddot{x}} \\ \ddot{\ddot{y}} \\ \ddot{\ddot{z}} \end{bmatrix} & \omega_{OI}^H &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \\
 \omega_{OI}^H &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} & \nabla f_g^H(\mathbf{r}_c^H) &= -\frac{\mu}{r_c^3} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{u}^H &= \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.50}$$

En utilisant les équations (2.19), (2.22) et (2.50), il est possible de former le modèle variables d'état suivant à partir de l'équation (2.49) :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}_{x_{xy}(t)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dot{\theta}^2 + \ddot{\theta} + 2b & 0 & 0 & 2\dot{\theta} \\ 0 & \dot{\theta}^2 - \ddot{\theta} - b & -2\dot{\theta} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}_{x_{xy}(t)} + \frac{1}{m} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} \\
 &\quad \underbrace{\quad}_{A_{Law,xy}^c} \quad \underbrace{\quad}_{B_{Law,xy}^c} \\
 \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \end{bmatrix}_{x_z(t)} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \end{bmatrix}_{x_z(t)} + \frac{1}{m} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_z \\
 &\quad \underbrace{\quad}_{A_{Law,z}^c} \quad \underbrace{\quad}_{B_{Law,z}^c}
 \end{aligned} \tag{2.51}$$

où b est défini par :

$$b = n^2 \left(\frac{1 + e \cos \theta}{1 - e^2} \right)^3 \tag{2.52}$$

La dynamique dans le plan x - y fait référence au mouvement dans le plan, tandis que la dynamique selon l'axe z correspond au mouvement hors du plan. Pour obtenir les expressions qui définissent $\ddot{\theta}$ et $\dot{\theta}$, il faut utiliser quelques définitions importantes présentées dans le volume de (Bate 1971). En effet, l'expression de $\dot{\theta}$ en fonction de l'anomalie excentrique est présentée à l'équation suivante :

$$\dot{\theta} = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{r} \dot{E} \tag{2.53}$$

L'expression de \dot{E} peut être obtenue en dérivant l'équation d'Euler présentée à l'équation (2.29) :

$$\dot{E} = \frac{n}{1 - e \cos E} \tag{2.54}$$

En substituant les équations (2.25) et (2.54), l'équation (2.53) devient :

$$\dot{\theta} = \frac{n\sqrt{1-e^2}}{(1 - e \cos E)^2} \tag{2.55}$$

L'équation (2.35) permet d'exprimer le dénominateur du terme de droite de l'équation précédente en fonction de l'anomalie vraie :

$$1 - e \cos E = \frac{1 - e^2}{e \cos \theta + 1} \tag{2.56}$$

En substituant l'équation (2.56) dans (2.55), la vitesse angulaire est obtenue :

$$\dot{\theta} = \frac{n(e \cos \theta + 1)^2}{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{2.57}$$

Finalement, pour obtenir l'accélération angulaire, il suffit de dériver l'expression précédente :

$$\ddot{\theta} = \frac{-2en \sin \theta \dot{\theta}}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} (e \cos \theta + 1) \quad (2.58)$$

En substituant ces résultats dans l'équation (2.51) et en appliquant le changement de variable défini à l'équation (2.59), il est possible d'obtenir le résultat de l'équation (2.60).

$$\begin{aligned} \left(\frac{\cdot}{\cdot} \right) &= \frac{d(\cdot)}{d\theta} \dot{\theta} \\ \left(\frac{\cdot}{\cdot} \right) &= \frac{d^2(\cdot)}{d\theta^2} \dot{\theta}^2 + \frac{\dot{\theta} d\dot{\theta}}{d\theta} \frac{d(\cdot)}{d\theta} \end{aligned} \quad (2.59)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2e \sin \theta & 3+e \cos \theta & 1 & 0 \\ 1+e \cos \theta & 1+e \cos \theta & 2 & -2e \sin \theta \\ 2e \sin \theta & -2 & e \cos \theta & 1+e \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \frac{dz}{d\theta} \end{bmatrix} + \frac{(1-e^2)^3}{(1+e \cos \theta)^4 n^2 m} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} \\ \frac{d}{d\theta} \begin{bmatrix} z \\ \frac{dz}{d\theta} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2e \sin \theta & -1 \\ 1+e \cos \theta & 1+e \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \frac{dz}{d\theta} \end{bmatrix} + \frac{(1-e^2)^3}{(1+e \cos \theta)^4 n^2 m} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [u_z] \end{aligned} \quad (2.60)$$

Ce système d'équations différentielles linéaires à coefficients variant en fonction de l'anomalie vraie possède une solution homogène analytique obtenue en posant $u_x = u_y = u_z = 0$:

$$\begin{aligned} x(\theta) &= \sin \theta (d_1 e + 2d_2 e^2 H(\theta)) - \cos \theta \left[\frac{d_2}{(1+e \cos \theta)^2} + d_3 \right] \\ y(\theta) &= d_1 + \frac{d_4}{1+e \sin \theta} + 2d_2 e H(\theta) + \sin \theta \left[\frac{d_3}{1+e \cos \theta} + d_3 \right] + \cos \theta [d_1 e + 2d_2 e^2 H(\theta)] \\ \frac{dx(\theta)}{d\theta} &= \cos \theta (d_1 e + 2d_2 e^2 H(\theta)) + \sin \theta \left[2d_2 e^2 \frac{dH(\theta)}{d\theta} \right] + \sin \theta \left[\frac{d_2 e}{(1+e \cos \theta)^2} + d_3 \right] - \cos \theta \left[\frac{2d_2 e^2 \sin \theta}{(1+e \cos \theta)^3} \right] \\ \frac{dy(\theta)}{d\theta} &= \frac{d_4 e \sin \theta}{(1+e \sin \theta)^2} + 2d_2 e \frac{dH(\theta)}{d\theta} + \cos \theta \left[\frac{d_3}{1+e \cos \theta} + d_3 \right] + \sin \theta \left[\frac{d_3 e \sin \theta}{(1+e \cos \theta)^2} \right] \\ &\quad - \sin \theta [d_1 e + 2d_2 e^2 H(\theta)] + \cos \theta \left[2d_2 e^2 \frac{dH(\theta)}{d\theta} \right] \\ z(\theta) &= \sin \theta \frac{d_5}{1+e \cos \theta} + \cos \theta \frac{d_6}{1+e \cos \theta} \\ \frac{dz(\theta)}{d\theta} &= \cos \theta \frac{d_5}{1+e \cos \theta} + \sin \theta \frac{d_5 e \sin \theta}{(1+e \cos \theta)^2} - \sin \theta \frac{d_6}{1+e \cos \theta} + \cos \theta \frac{d_6 e \sin \theta}{(1+e \cos \theta)^2} \end{aligned} \quad (2.61)$$

où d_i correspond aux constantes d'intégration. Les expressions $H(\theta)$ et $dH(\theta)/d\theta$ sont définies par :

$$\begin{aligned} H(\theta) &= \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\cos \theta}{(1+e \cos \theta)^3} d\theta = -(1-e^2)^{-\frac{5}{2}} \left[\frac{3eE}{2} - (1-e^2) \sin E \cos E + \frac{e}{2} \sin E \cos E + d_H \right] \\ \frac{dH(\theta)}{d\theta} &= \frac{\cos \theta}{(1+e \cos \theta)^3} \end{aligned} \quad (2.62)$$

où d_H est aussi une constante d'intégration calculée de manière à ce que $H(\theta_0) = 0$, θ_0 étant l'anomalie vraie initiale. (Inalhan 2002) propose une technique pour déterminer la valeur des constantes d'intégration en fonction des conditions initiales dans le repère $\vec{\mathcal{S}}_H$. En fait, il suffit de résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{bmatrix} x(\theta_0) \\ y(\theta_0) \\ \frac{dx(\theta_0)}{d\theta} \\ \frac{dy(\theta_0)}{d\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

$$\begin{bmatrix} z(\theta_0) \\ \frac{dz(\theta_0)}{d\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_5 \\ r_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_5 \\ d_6 \end{bmatrix}$$

où r_i sont les vecteurs ligne qui correspondent aux coefficients de d_i extraits de l'équation (2.61). De plus, (Inalhan 2002) démontre qu'il faut imposer la contrainte montrée à l'équation (2.64) pour annuler les termes séculaires et éviter que le satellite esclave dérive par rapport au satellite chef lorsque ceux-ci sont placés sur une orbite elliptique.

$$\frac{dy(0)}{d\theta} = -\frac{2+e}{1+e}x(0) \quad (2.64)$$

En fait, cette contrainte maintient la périodicité du mouvement relatif et assure la cohésion de la formation. De plus, celle-ci permet de conserver la solution du modèle valide, c'est-à-dire près de son point de linéarisation. En effet, en laissant la formation dériver, la position relative du satellite esclave augmente inévitablement et ce, jusqu'à ce que l'équation (2.61) ne soit plus valide.

Pour approfondir l'analyse de la littérature, le candidat propose de comparer la performance de la solution homogène du modèle de Lawden au mouvement relatif non linéaire et non perturbé, et ce, pour différentes valeurs d'excentricité. Pour ce faire, considérer les paramètres montrés au Tableau 2.1 et au Tableau 2.2. En fait, le premier tableau présente les éléments d'orbite du satellite chef tandis que le deuxième montre la position et la vitesse relatives initiales du satellite esclave.

Tableau 2.1 : Éléments d'orbite initiaux du satellite chef

Éléments d'orbite	Valeurs
a	2.4200×10^7 m
u_0	$\frac{5\pi}{4}$ rad
i	$\frac{\pi}{4}$ rad
e	0.1
ω	$\frac{\pi}{4}$ rad
Ω	0 rad

Tableau 2.2 : Positions et vitesses relatives initiales du satellite esclave

Hill	Valeurs
x_0	100 m
y_0	100 m
z_0	100 m
\dot{x}_0	0 m/s
\dot{y}_0	-173.6n m/s
\dot{z}_0	0 m/s

Il est à noter que la vitesse \dot{y} a été déterminée en utilisant la contrainte de l'équation (2.64) pour éviter une dérive de la position relative. Les paramètres précédents sont utilisés avec l'Algorithme 2.1 afin d'obtenir une trajectoire relative basée sur la solution homogène du modèle de Lawden.

1. Former la matrice R_{xy} et R_z en utilisant les coefficients des constantes d_i de l'équation (2.61).
2. Calculer $d_{xy} = R_{xy}^{-1}[y(\theta_0) \ x(\theta_0) \ dx(\theta_0)/d\theta \ dy(\theta_0)/d\theta]$ et $d_z = R_z^{-1}[z(\theta_0) \ dz(\theta_0)/d\theta]$ en utilisant

l'équation (2.59) pour obtenir $(\cdot)'$ à partir de (\cdot) et les paramètres de l'orbite du satellite chef.

3. Considérer le vecteur temps $t = [0 \dots t_{max}]$. Pour tous les éléments de ce vecteur, noté t_k , faire les étapes 4-5.
4. Utiliser la démarche expliquée dans la Section 2.3 pour calculer l'anomalie vraie θ_k à partir de t_k .
5. À partir des valeurs de d_{xy} , d_z et θ_k évaluer l'équation (2.61) pour obtenir la position et la vitesse relative de la formation. Utiliser, si nécessaire, l'équation (2.59) pour convertir les dérivées par rapport à l'anomalie vraie en vitesse relative.
6. Fin de l'algorithme.

Algorithme 2.1 : Calcul d'une trajectoire relative en utilisant la solution homogène du modèle de Lawden

La Figure 2.6 et la Figure 2.7 montrent respectivement l'évolution de la position et de la vitesse relatives du satellite esclave obtenue en utilisant le modèle de Lawden et les erreurs relatives obtenues en comparant ce dernier au modèle non linéaire intégré numériquement.

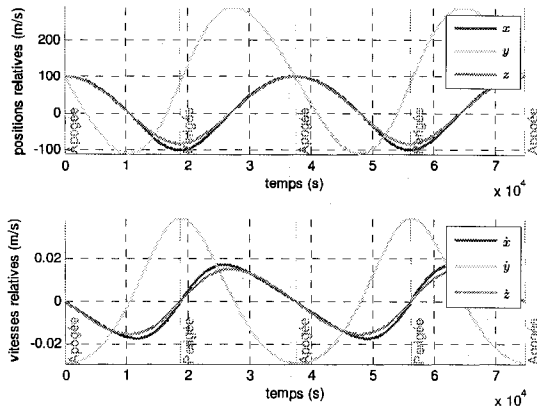


Figure 2.6 : États relatifs obtenus par le modèle de Lawden avec $e = 0.1$

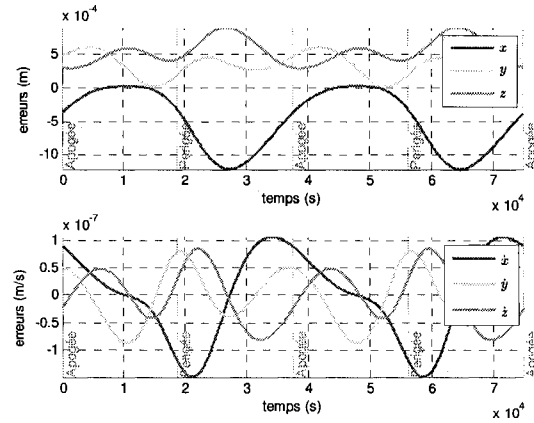


Figure 2.7 : Erreurs relatives du modèle de Lawden par rapport au mouvement relatif non linéaire avec $e = 0.1$

Ces figures démontrent que le modèle de Lawden représente bien le modèle non linéaire. En effet, l'erreur de propagation du modèle est très faible. La Figure 2.8 et la Figure 2.9 montre les mêmes résultats, mais lorsque que l'excentricité de l'orbite du satellite chef est élevée, c'est-à-dire 0.7.

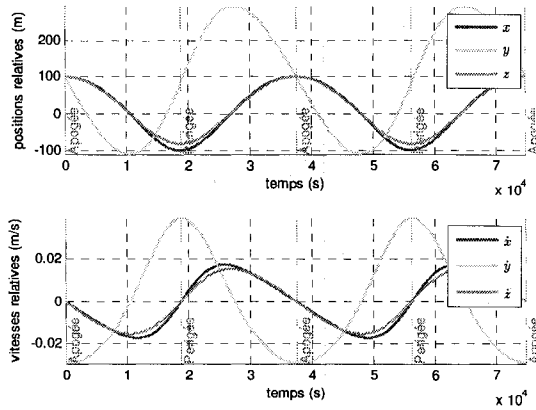


Figure 2.8 : États relatifs obtenus par le modèle de Lawden avec $e = 0.7$

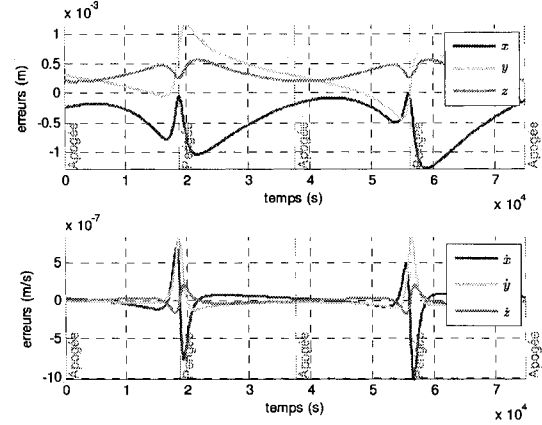


Figure 2.9 : Erreurs relatives du modèle de Lawden par rapport au mouvement relatif non linéaire avec $e = 0.7$

Il est possible de constater que la précision du modèle de Lawden se dégrade légèrement avec l'augmentation de l'excentricité. Cependant, le modèle est suffisamment précis pour la plupart des applications. De plus, les erreurs de propagation du modèle de Lawden, concentrées près du périégée, n'augmentent que très légèrement avec le temps.

2.4.3. Modèle de Hill

Plusieurs lois de commande pour les formations de satellites ont été développées en utilisant le modèle de Hill, aussi appelé Clohessy-Wiltshire. Ce modèle suppose que l'orbite du satellite chef est circulaire. Cette réalité permet de décrire le mouvement relatif en fonction du temps, contrairement au modèle de Lawden qui le fait en fonction de l'anomalie vraie. Le volume de (Fehse 2003) présente le développement complet de ces équations. Les paragraphes qui suivent en présentent les grandes lignes.

En supposant que l'orbite de référence est circulaire, c'est-à-dire que $\dot{\theta} = n = \sqrt{\mu/r_c^3}$, r_c est constant et $\ddot{\theta} = 0$ l'équation (2.51) devient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3n^2 & 0 & 0 & 2n \\ 0 & 0 & -2n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} + \frac{1}{m} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} \\ &\quad \begin{matrix} x_{xy}(t) & A_{Hill,xy}^c & x_{xy}(t) & B_{Hill,xy}^c & u_{xy} \end{matrix} \\ \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -n^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \end{bmatrix} + \frac{1}{m} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_z \\ &\quad \begin{matrix} z_z(t) & A_{Hill,z}^c & z_z(t) & B_{Hill,z}^c & u_z \end{matrix} \end{aligned} \quad (2.65)$$

La solution homogène de ce système d'équations, obtenu en utilisant la transformée de Laplace avec $u = 0$, est présentée à l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{\dot{x}_0}{n} \sin(nt) - \left(\frac{2\dot{y}_0}{n} + 3x_0 \right) \cos(nt) + \left(4x_0 - \frac{2\dot{y}_0}{n} \right) \\
\dot{x}(t) &= \dot{x}_0 \cos(nt) + (2\dot{y}_0 + 3x_0) \sin(nt) \\
y(t) &= \frac{2\dot{x}_0}{n} \cos(nt) - \left(\frac{4\dot{y}_0}{n} + 6x_0 \right) \sin(nt) + (6nx_0 + 3\dot{y}_0)t + \left(y_0 - \frac{2\dot{x}_0}{n} \right) \\
\dot{y}(t) &= -2\dot{x}_0 \sin(nt) - (4\dot{y}_0 + 6nx_0) \cos(nt) + (6nx_0 + 3\dot{y}_0) \\
z(t) &= \frac{\dot{z}_0}{n} \sin(nt) - z_0 \cos(nt) \\
\dot{z}(t) &= \dot{z}_0 \cos(nt) + z_0 n \sin(nt)
\end{aligned} \tag{2.66}$$

où $x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0$ et \dot{z}_0 sont des constantes d'intégration qui correspondent aux données relatives initiales en position et en vitesse. De la même manière qu'avec le modèle de Lawden, il faut éliminer les termes séculaires présents dans la solution du système pour maintenir la périodicité du mouvement relatif en imposant une contrainte sur \dot{y}_0 :

$$\dot{y}_0 = -2x_0 n \tag{2.67}$$

Il est à noter que cette contrainte est équivalente à celle de l'équation (2.64) lorsque $e = 0$ et que $\dot{\theta} = n$. Il est intéressant de comparer les équations de Hill avec le modèle non linéaire et non perturbé comme cela été fait avec le modèle de Lawden. La première simulation a été réalisée avec les paramètres présentés aux Tableau 2.3 et Tableau 2.4.

Tableau 2.3 : Éléments d'orbite initiaux du satellite chef

Éléments d'orbite	Valeurs
a	2.4200×10^7 m
u_0	$\frac{5\pi}{4}$ rad
i	$\frac{\pi}{4}$ rad
e	0
ω	$\frac{\pi}{4}$ rad
Ω	0 rad

Tableau 2.4 : Positions et vitesses relatives initiales du satellite esclave

Hill	Valeurs
x_0	100 m
y_0	100 m
z_0	100 m
\dot{x}_0	0 m/s
\dot{y}_0	$-200n$ m/s
\dot{z}_0	0 m/s

Les résultats sont présentés à la Figure 2.10 et à la Figure 2.11.

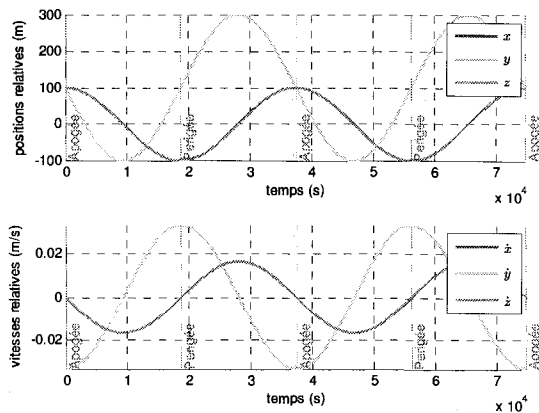


Figure 2.10 : États relatifs obtenus par le modèle de Hill avec $x_0 = [100, 100, 100, 0, -200n, 0]^T$

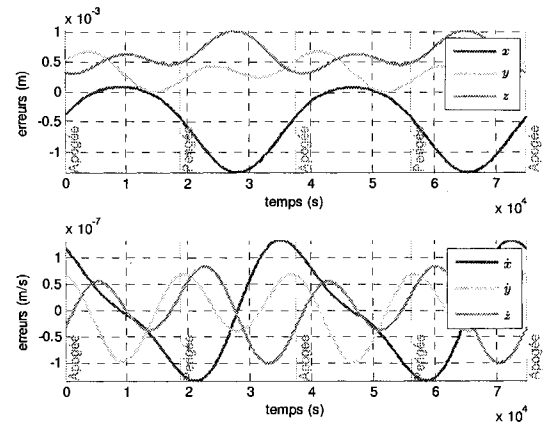


Figure 2.11 : Erreurs relatives du modèle de Hill par rapport au mouvement relatif non linéaire avec $x_0 = [100, 100, 100, 0, -200n, 0]^T$

Il est à noter que les mouvements en x et en z sont superposés. Ces figures montrent que la précision du modèle est très bonne. De plus l'erreur est périodique et n'augmente pas avec le temps. Pour pousser plus loin l'analyse, les conditions initiales peuvent être modifiées de manière à ce que la position relative du satellite esclave soit plus grande, c'est-à-dire 10 km au lieu de 100 m pour les axes x , y et z . Les résultats sont montrés à la Figure 2.12 et à la Figure 2.13.

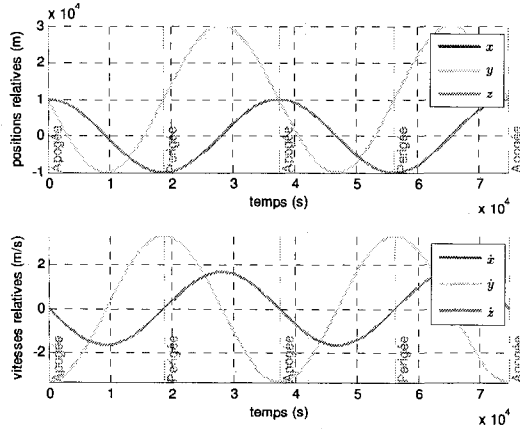


Figure 2.12 : États relatifs obtenus par le modèle de Hill avec $x_0 = [10^4, 10^4, 10^4, 0, -2 \times 10^4 n, 0]^T$

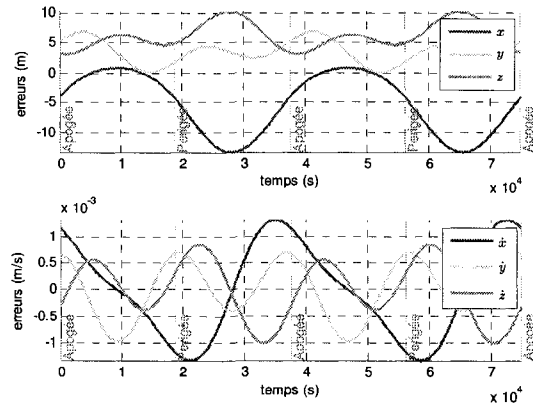


Figure 2.13 : Erreurs relatives du modèle de Hill par rapport au mouvement relatif non linéaire avec $x_0 = [10^4, 10^4, 10^4, 0, -2 \times 10^4 n, 0]^T$

Ces figures montrent que plus la distance relative augmente, plus l'erreur de propagation du modèle de Hill est élevée. Cette réalité est causée par la linéarisation du modèle relatif non linéaire qui repose sur l'hypothèse que la position relative doit être petite par rapport au rayon de l'orbite pour que le modèle linéaire demeure valide. Il est à noter que l'augmentation de l'erreur n'est pas proportionnelle à l'augmentation de la position relative initiale. En fait, celle-ci est exponentielle.

Les résultats précédents ont été présentés pour démontrer l'évolution de chacune des composantes du mouvement relatif en fonction du temps. Cependant, il est aussi intéressant d'afficher les résultats sous forme de diagramme des phases en position relative. La Figure 2.14 présente le graphique obtenu en utilisant cette représentation à partir des données de la Figure 2.10.

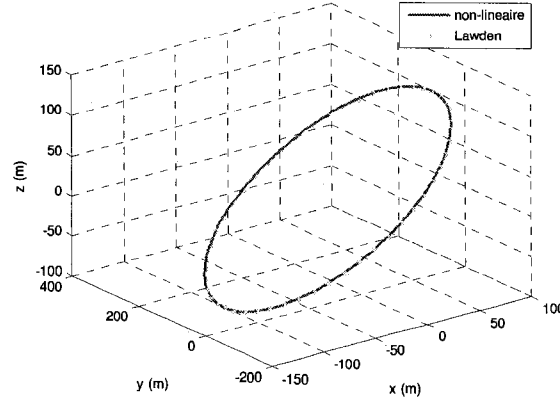


Figure 2.14 : Diagramme des phases en position obtenu par la solution homogène du modèle de Hill avec $x_0 = [100, 100, 100, 0, -200n, 0]^T$

Il est possible de constater que le mouvement relatif entre deux satellites, lorsque le satellite chef est sur une orbite circulaire, forme une ellipse. En fait, l'article de (Lovell, Horneman et al. 2004) proposent de transformer l'équation (2.66) sous une forme paramétrique :

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a_e}{2} \cos \beta + x_d & \dot{x}(t) &= \frac{a_e}{2} n \sin \beta \\ y(t) &= a_e \sin \beta + y_d + y_r t & \dot{y}(t) &= a_e n \cos \beta + y_r \\ z(t) &= z_{max} \sin \phi & \dot{z}(t) &= z_{max} n \cos \phi \end{aligned} \quad (2.68)$$

où a_e , z_{max} , x_d , y_d , y_r , β et ϕ sont définis par :

$$\begin{aligned} a_e &= 2 \sqrt{\left(\frac{\dot{x}_0}{n}\right)^2 + \left(3x_0 + 2\frac{\dot{y}_0}{n}\right)^2} & z_{max} &= \sqrt{\left(\frac{\dot{z}_0}{n}\right)^2 + z_0^2} \\ x_d &= 4x_0 + \frac{2\dot{y}_0}{n} & y_d &= y_0 - \frac{2\dot{x}_0}{n} \\ y_r &= \frac{3}{2} n x_d & \phi &= nt + \tan^{-1}\left(\frac{nz_0}{\dot{z}_0}\right) \\ \beta &= nt + \tan^{-1}\left(\frac{\dot{x}_0}{3nx_0 + 2\dot{y}_0}\right) \end{aligned} \quad (2.69)$$

Cette version des équations de Hill est plus intuitive, car elle illustre le fait que le mouvement relatif décrit une trajectoire elliptique centrée à $(x_d, y_d, 0)$. Cette ellipse glisse dans la direction y avec une vitesse définie par y_r . Sa projection dans le plan orbital est une ellipse 2×1 d'axe semi-majeur a_e . Le paramètre β indique la position de l'esclave sur cette dernière.

2.4.4. Modèle de Hill incluant J_2

Les modèles présentés jusqu'à présent considéraient que les perturbations \vec{f}_p agissant sur les satellites de la formation sont nulles. Cependant, quelques auteurs se sont intéressés à modéliser le mouvement relatif en présence des perturbations orbitales J_2 . En effet, la Terre n'est pas complètement sphérique ce qui provoque des anomalies dans son champ gravitationnel non représentées dans la dynamique képlérienne. Plus précisément, les perturbations orbitales causées par l'aplatissement aux pôles de la Terre exprimées dans le repère orbital sont définies par :

$$\vec{f}_{J_2}(\vec{r}) = -\frac{3J_2\mu r_t^2}{2r^4} \left((1 - 3\sin^2 i \sin^2 u) \vec{O}_r + (1 - 3\sin^2 i \sin u \cos u) \vec{O}_\theta + 2\sin i \cos i \sin u \vec{O}_n \right) \quad (2.70)$$

où $J_2 = 1082.64 \times 10^{-6}$ et $r_t = 6.37816 \times 10^6$ m est le rayon de la Terre. (Schweighart 2002) propose une approche complexe pour ajouter ces perturbations au modèle de Hill. Par contre, ce modèle possède une solution homogène analytique utile. Pour l'obtenir, il faut considérer la dynamique non linéaire du satellite esclave lorsque celui-ci est soumis aux perturbations J_2 :

$$\ddot{\vec{r}}_e = \vec{f}_g(\vec{r}_e) + \vec{f}_{J_2}(\vec{r}_e) \quad (2.71)$$

En linéarisant cette équation par rapport à l'orbite de référence, il est possible d'obtenir :

$$\ddot{\vec{r}}_e \approx \vec{f}_g(\vec{r}_c) + \nabla \vec{f}_g(\vec{r}_c) \cdot \vec{d} + \vec{f}_{J_2}(\vec{r}_c) + \nabla \vec{f}_{J_2}(\vec{r}_c) \cdot \vec{d} \quad (2.72)$$

En substituant l'équation précédente dans l'équation (2.43), l'équation (2.73) est obtenue.

$$\ddot{\vec{d}} = \vec{f}_g(\vec{r}_c) + \nabla \vec{f}_g(\vec{r}_c) \cdot \vec{d} + \vec{f}_{J_2}(\vec{r}_c) + \nabla \vec{f}_{J_2}(\vec{r}_c) \cdot \vec{d} - \ddot{\vec{r}}_c \quad (2.73)$$

En utilisant la cinématique des repères tournants comme cela a été fait à l'équation (2.45), l'équation (2.73) devient :

$$\ddot{\vec{d}} + 2\vec{\omega}_{OI} \times \dot{\vec{d}} + \vec{\omega}_{OI} \times (\vec{\omega}_{OI} \times \vec{d}) + \dot{\vec{\omega}}_{OI} \times \vec{d} = \vec{f}_g(\vec{r}_c) + \nabla \vec{f}_g(\vec{r}_c) \cdot \vec{d} + \vec{f}_{J_2}(\vec{r}_c) + \nabla \vec{f}_{J_2}(\vec{r}_c) \cdot \vec{d} - \ddot{\vec{r}}_c \quad (2.74)$$

Étant donné la présence des perturbations orbitales, les paramètres de cette équation différentielle varient en fonction de l'argument de latitude. Cette réalité fait qu'il est difficile de la solutionner directement. En fait, pour y arriver (Schweighart 2002) propose d'appliquer deux approximations. Premièrement, il faut évaluer le gradient de $\vec{f}_{J_2}(\vec{r}_c)$ en prenant sa moyenne sur une révolution d'orbite :

$$\nabla \vec{f}_{J_2}(\vec{r}_c) \cdot \vec{d} \approx \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \nabla \vec{f}_{J_2}(\vec{r}_c) du \cdot \vec{d} \quad (2.75)$$

Deuxièmement, il faut établir la dynamique du satellite chef de manière à ce que celle-ci ait une vitesse angulaire constante malgré l'effet des perturbations orbitales. Dans ce contexte, J_2 modifie la période orbitale du satellite chef. Pour traduire mathématiquement ces affirmations, il suffit de considérer que seulement la moyenne de $\vec{f}_{J_2}(\vec{r}_c)$ est exercée sur le centre de masse du satellite chef :

$$\ddot{\vec{r}}_c = \vec{f}_g(\vec{r}_c) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \vec{f}_{J_2}(\vec{r}_c) d\theta \quad (2.76)$$

En substituant les équations (2.75) et (2.76), l'équation (2.74) devient :

$$\ddot{\vec{d}} + 2\vec{\omega}_{OI} \times \dot{\vec{d}} + \vec{\omega}_{OI} \times (\vec{\omega}_{OI} \times \vec{d}) + \dot{\vec{\omega}}_{OI} \times \vec{d} = \nabla \vec{f}_g(\vec{r}_c) \cdot \vec{d} + \vec{f}_{J_2}(\vec{r}_c) + \int_0^{2\pi} \nabla \vec{f}_{J_2}(\vec{r}_c) d\theta \cdot \vec{d} - \int_0^{2\pi} \vec{f}_{J_2}(\vec{r}_c) d\theta \quad (2.77)$$

Pour obtenir les composantes de cette équation, il faut de prendre le produit scalaire $\vec{\mathfrak{S}}_H \cdot ()$:

$$\ddot{\vec{d}}^H + 2\vec{\omega}_{OI}^H \times \dot{\vec{d}}^H + (\vec{\omega}_{OI}^H)^\times (\vec{\omega}_{OI}^H)^\times \vec{d}^H + (\dot{\vec{\omega}}_{OI}^H)^\times \vec{d}^H = \nabla \vec{f}_g^H(\vec{r}_c^H) \vec{d}^H + \vec{f}_{J_2}^H(\vec{r}_c^H) + \int_0^{2\pi} \nabla \vec{f}_{J_2}^H(\vec{r}_c^H) d\theta \cdot \vec{d} - \int_0^{2\pi} \vec{f}_{J_2}^H(\vec{r}_c^H) d\theta \quad (2.78)$$

où :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \nabla f_{J_2}^H(\mathbf{r}^H) du &= \frac{\mu}{r^3} \begin{bmatrix} 4s & 0 & 0 \\ 0 & -s & 0 \\ 0 & 0 & -3s \end{bmatrix} & f_{J_2}^H(\mathbf{r}^H) &= -\frac{3J_2\mu r_t^2}{2} \begin{bmatrix} 1 - 3\sin^2 i \sin^2(nct) \\ 1 - 3\sin^2 i \sin u \cos(nct) \\ 2\sin i \cos i \sin(nct) \end{bmatrix} \\
\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_{J_2}^H(\mathbf{r}^H) du &= \begin{bmatrix} -n^2 r s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \omega_{OI}^H &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ nc \end{bmatrix}
\end{aligned} \quad (2.79)$$

sachant que $c = \sqrt{1+s}$ et $s = 3J_2 r_t^2 (1 + 3\cos(2i)) / (8r^2)$. Il est à noter que $\ddot{\mathbf{d}}^H$, $\dot{\mathbf{d}}^H$, \mathbf{d}^H et $\nabla f_g^H(r_c^H)$ ont déjà été présentées à l'équation (2.50). De cette manière, l'équation suivante est obtenue :

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= 2nc\dot{x} - (5c^2 - 2)n^2x = -3n^2J_2 \frac{r_e}{r_c} \left(\frac{1}{2} - 3\sin^2 i \sin^2(nct) - \frac{1 + 3\cos(2i)}{8} \right) \\
\ddot{y} &= 2nc\dot{y} - 3n^2J_2 \frac{r_e}{r_c} \sin^2 i \sin(nct) \cos(nct) \\
\ddot{z} + (3c^2 - 2)n^2z &= -3n^2J_2 \frac{r_e}{r_c} \sin i \cos(i) \sin(nct)
\end{aligned} \quad (2.80)$$

La solution de ces équations différentielles linéaires peut être obtenue analytiquement :

$$\begin{aligned}
x(t) &= (x_0 - \alpha) \cos(nt\sqrt{1-s}) + \frac{\sqrt{1-s}}{2\sqrt{1+s}} y_0 n^2 \sin(nt\sqrt{1-s}) + \alpha \cos(2nt\sqrt{1+s}) \\
y(t) &= -\frac{\sqrt{1+s}}{2\sqrt{1-s}} (x_0 - \alpha) \sin(nt\sqrt{1-s}) + y_0 \cos(nt\sqrt{1-s}) + \frac{1+3s}{2(1+s)} \alpha \sin(2nt\sqrt{1+s}) \\
z(t) &= z_0 \cos(nt\sqrt{1+3s}) + \frac{\dot{z}_0}{n\sqrt{1+3s}} \sin(nt\sqrt{1+3s}) + \beta (\sqrt{1+s} \sin(2nt\sqrt{1+s}) - \sqrt{1-3s} \sin(2nt\sqrt{1+s}))
\end{aligned} \quad (2.81)$$

où α et β sont définis par :

$$\alpha = \frac{3J_2 R_e^2}{8r_c(3+5s)} (1 - \cos(2i)) \quad \beta = \frac{3J_2 R_e^2}{4r_c s \sqrt{1+3s}} \quad (2.82)$$

En posant la constante J_2 à zéro, les équations de Hill présentées à l'équation (2.66) sont obtenues. La solution de (Schweighart 2002) comporte également six degrés de liberté. Cependant, il faut contraindre la vitesse initiale dans les directions x et y pour annuler les termes séculaires :

$$\begin{aligned}
\dot{x}_0 &= y_0 n + \frac{1-s}{2c} \\
\dot{y}_0 &= -2ncx_0 + \frac{3nJ_2 R_e^2}{8cr_c} (1 - \cos(2i))
\end{aligned} \quad (2.83)$$

Cette considération empêche que l'esclave dérive jusqu'à ce que l'approximation réalisée lors de la linéarisation ne soit plus valide.

2.5. Dynamique orbitale relative par éléments d'orbite

Jusqu'à maintenant, les variables d'états des modèles dynamiques relatifs étaient exprimées en coordonnées cartésiennes. Cependant, celle-ci peuvent être décrites en utilisant la différence entre les éléments d'orbite du satellite esclave et ceux du satellite chef :

$$\Delta \mathbf{e}(t) = \mathbf{e}_e - \mathbf{e}_c = [\Delta a \quad \Delta M \quad \Delta i \quad \Delta e \quad \Delta \omega \quad \Delta \Omega]^T \quad (2.84)$$

Quelques modèles utilisant cette représentation ont été proposés dans la littérature, la Figure 2.15 répertorie les plus importants.

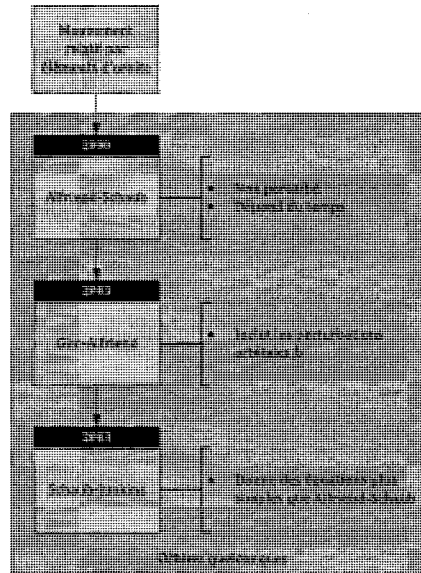


Figure 2.15 : Organigramme de la théorie concernant la modélisation du mouvement orbital relatif par éléments d'orbite

Le volume de (Schaub et Junkins 2003) basé sur les travaux de (Alfriend, Schaub et al. 2000) et de (Gim et Alfriend 2003) présente une technique pour obtenir la matrice d'états de transition, notée $\Phi_{\Delta e}(t, t_0)$, décrivant le comportement de la différence des éléments d'orbite d'une formation de satellites évoluant sur une orbite elliptique. Celle-ci permet d'obtenir la matrice d'états de transition $\Phi_x(t, t_0)$, c'est-à-dire à la solution homogène du mouvement relatif dans le repère de Hill, en utilisant la correspondance linéaire $M(e_c)$ entre les coordonnées relatives cartésiennes et la différence d'éléments d'orbite présentée à l'Annexe C. Une matrice d'état de transition est une matrice qui, multipliée par les états initiaux du système au temps t_0 , donne les états à un temps futur t . Cette entité mathématique est très utilisée pour prédire le comportement d'un système, mais il est difficile de l'utiliser pour faire la synthèse d'une loi de commande. En effet, dans cette situation les équations différentielles dynamiques représentées sous forme de modèle variable d'état est nécessaire. Mathématiquement, la matrice d'état de transition de (Schaub et Junkins 2003) est définie par :

$$\Phi_x(t, t_0) \approx M(e_c) \Phi_{\Delta e}(t, t_0) M(e_c)^{-1} \quad (2.85)$$

Lorsque l'orbite de la formation est non perturbée, seulement la différence d'argument de latitude varie dans le temps. De cette manière, il est possible d'établir que :

$$\Delta u(t) = \Delta \omega + \Delta \theta(t) \quad (2.86)$$

$$\Delta u(t_0) = \Delta \omega + \Delta \theta(t_0) \quad (2.87)$$

Pour former $\Phi_{\Delta e}(t, t_0)$, il suffit donc d'exprimer $\Delta \theta(t)$ en fonction de $\Delta e(t_0)$. Pour ce faire, il faut calculer la variation de M , donnée à l'équation (2.30), par rapport aux éléments d'orbite du satellite chef :

$$\Delta M = \Delta M_0 + \frac{3}{2} \frac{\Delta a}{a} (M - M_0) \quad (2.88)$$

Il est noter que pour simplifier la notation, l'indice 0 indique que l'état est évalué au temps t_0 . En faisant la même opération avec l'équation de Kepler, présentée à l'équation (2.29), il est possible d'obtenir :

$$\Delta M = (1 - e \cos E) \Delta E - \sin E \Delta e \quad (2.89)$$

Pour évaluer ΔE , il suffit de prendre la variation de l'équation (2.37) :

$$\Delta E = \frac{\eta}{1 + e \cos \theta} \Delta \theta - \frac{\sin \theta}{1 + e \cos \theta} \frac{\Delta e}{\eta} \quad (2.90)$$

où $\eta = \sqrt{1 - e^2}$. En substituant ce résultat dans l'équation (2.89), il est facile d'obtenir :

$$\Delta M = \frac{\eta}{(1 + e \cos \theta)^2} (\eta \Delta \theta - (2 + e \cos \theta) \sin \theta \Delta e) \quad (2.91)$$

La différence en anomalie moyenne initiale est exprimée en prenant avantage du fait que seulement l'anomalie varie en fonction du temps, c'est-à-dire en posant $\theta = \theta_0$ dans l'équation précédente :

$$\Delta M_0 = \frac{\eta}{(1 + e \cos \theta_0)^2} (\eta \Delta \theta_0 - (2 + e \cos \theta_0) \sin \theta_0 \Delta e) \quad (2.92)$$

En substituant les équations (2.91) et (2.92) dans l'équation (2.88) et en isolant le paramètre $\Delta \theta$ du résultat, l'équation suivante est obtenue :

$$\Delta \theta = A \Delta a + B \Delta f_0 + C \Delta e \quad (2.93)$$

où A , B et C sont définis par :

$$\begin{aligned} A &= -\frac{3}{2} \frac{a\eta}{r^2} (M - M_0) \\ B &= \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \\ C &= \frac{1}{\eta^2} \left(\sin \theta (2 + e \cos \theta) - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 (2 + e \cos \theta_0) \sin \theta_0 \right) \end{aligned} \quad (2.94)$$

En utilisant les éléments d'orbite de l'équation (C.2), les paramètres de l'équation (2.93) se réécrivent comme suit :

$$\begin{aligned} A &= -\frac{3}{2} \frac{a\eta}{r^2} (M - M_0) \\ B &= \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \\ C &= \frac{1}{\eta^2 \sqrt{q_1^2 + q_2^2}} \left((\sin u \, q_1 - \cos u \, q_2) (2 + q_1 \cos u + q_2 \sin u) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 (q_1 \sin u_0 - q_2 \cos u_0) (2 + q_1 \cos u_0 + q_2 \sin u_0) \right) \end{aligned} \quad (2.95)$$

où r est défini à (C.13) et $\eta = \sqrt{1 - q_1^2 - q_2^2}$. Par la suite, il faut utiliser les définitions de l'équation (C.3) pour obtenir la différence en excentricité et en argument du périhélie :

$$\begin{aligned} \Delta e &= \frac{1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}} (q_1 \Delta q_1 + q_2 \Delta q_2) \\ \Delta \omega &= \frac{1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}} (q_1 \Delta q_1 - q_2 \Delta q_2) \end{aligned} \quad (2.96)$$

En remplaçant les équations (2.86), (2.87) et (2.96) dans l'équation (2.93), il devient possible d'exprimer la différence en argument de latitude au temps t en fonction de la différence des éléments d'orbite initiale :

$$\Delta u = A\Delta a + B\Delta\theta_0 + C_1\Delta q_1 + C_2\Delta q_2 \quad (2.97)$$

où C_1 et C_2 sont définis par :

$$\begin{aligned} C_1 &= \left(C \frac{q_1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}} - (1-B) \frac{q_2}{q_1^2 + q_2^2} \right) \\ C_2 &= \left(C \frac{q_2}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}} + (1-B) \frac{q_1}{q_1^2 + q_2^2} \right) \end{aligned} \quad (2.98)$$

En organisant ces résultats sous une forme matricielle, $\Phi_{\Delta e}(t, t_0)$ peut être obtenue :

$$\Phi_{\Delta e}(t, t_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A & B & 0 & C_1 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.99)$$

Il est intéressant de comparer ce modèle avec le modèle non linéaire intégré numériquement en utilisant l'Algorithme 2.2.

1. Calculer l'anomalie moyenne initiale M_0 à partir de l'anomalie vraie initiale du satellite chef sachant que $\theta_0 = u_0 + \omega$. Conserver les paramètres θ_0 et u_0 .
2. Calculer r_0 à l'aide de l'équation (2.19) pour une anomalie vraie de θ_0 .
3. Considérer le vecteur temps $t = [0 \quad \dots \quad t_{max}]$. Pour tous les éléments de ce vecteur, notés t_k , faire les étapes 4-5-6-7-8.
4. Utiliser la démarche expliquée dans la Section 2.2 pour calculer l'anomalie vraie M_k, θ_k à partir de t_k .
5. Calculer r_k à l'aide de l'équation (2.19) pour une anomalie vraie de θ_k .
6. Calculer l'argument de latitude u_k correspondant à une anomalie de θ_k en utilisant l'argument du périégée du satellite chef. Utiliser la valeur de u_k ainsi que les autres éléments d'orbite initiaux du satellite chef pour évaluer $e_{c,k}$ et ainsi la matrice $M(e_{c,k})$ définie par les équations (C.15) et (C.21).
7. Calculer $\Phi_{\Delta e}(t, t_0)$ présenté à l'équation (2.99) en utilisant $M_0, \theta_0, u_0, r_0, M_k, \theta_k, u_k$ et r_k .
8. Appliquer l'équation (2.85) pour obtenir la position et la vitesse relatives de la formation.
9. Fin de l'algorithme.

Algorithme 2.2 : Calcul d'une trajectoire relative en utilisant la matrice d'états de transition de Schaub

En utilisant les paramètres montrés aux Tableau 2.1 et Tableau 2.2, les résultats obtenus pour une excentricité de 0.1 et de 0.7 sont montrés aux Figure 2.6, Figure 2.7, Figure 2.8 et Figure 2.9.

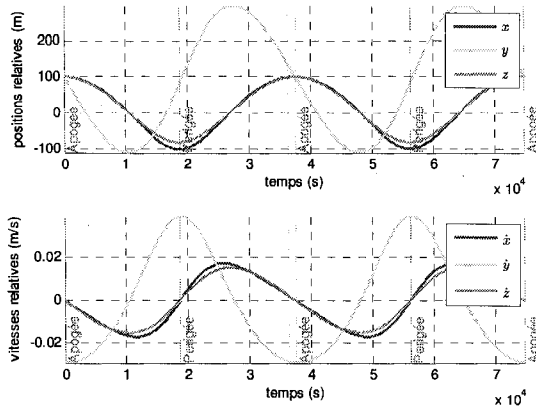


Figure 2.16 : États relatifs obtenus par le modèle de Schaub avec $e = 0.1$

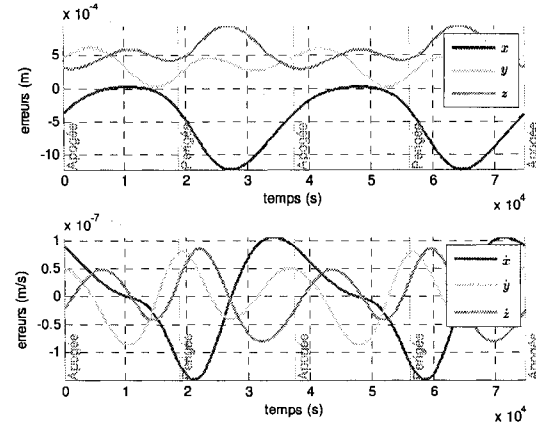


Figure 2.17 : Erreurs relatives du modèle de Schaub par rapport au mouvement relatif non linéaire avec $e = 0.1$

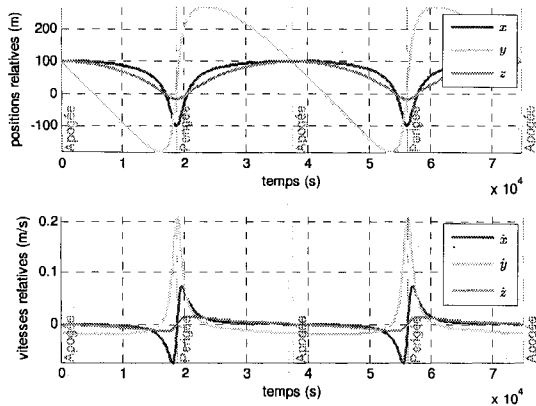


Figure 2.18 : États relatifs obtenus par le modèle de Schaub avec $e = 0.7$

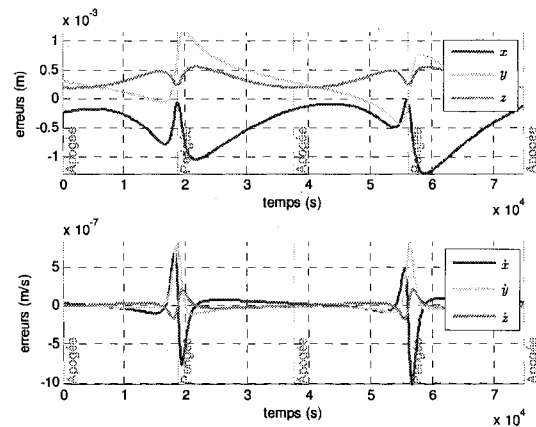


Figure 2.19 : Erreurs relatives du modèle de Schaub par rapport au mouvement relatif non linéaire avec $e = 0.7$

Ces figures sont identiques à celles obtenus à partir du modèle de Lawden. Ces deux modèles dépendent de l'anomalie vraie et demandent environ le même nombre de calculs. Cependant, le modèle de Schaub permet de traiter les conditions initiales beaucoup plus facilement.

2.6. Type de formation de satellites

Il existe plusieurs types de formation de satellites. Cependant, il est possible de les séparer en deux catégories, à savoir les formations naturelles et les formations forcées ou artificielles. La section qui suit présente ces deux types de formations.

2.6.1. Formations naturelles

Les formations naturelles se maintiennent naturellement, c'est-à-dire sans effort de commande, dans un environnement sans perturbation. Il en existe un nombre limité et elles peuvent être décrites par

un ensemble de conditions initiales. L'article de (Sabot 2004) présente quelques exemples de formations obtenues à partir des équations de Hill :

- Formation dans le plan : Ce type de formation est le plus simple. Elle est constituée d'un groupe de satellites qui occupent le même plan orbital et qui sont séparés par une anomalie moyenne. Dans les équations de Hill, cette formation est représentée en mettant toutes les conditions initiales à zéro excepté pour y_0 .
- Formation dans la route : Ce type de formation permet aux satellites de suivre la même trace au sol. Les conditions initiales à utiliser pour obtenir ce type de formation sont semblables à celles associées aux formations dans le plan. Cependant, la condition initiale de z_0 est déterminée en fonction du choix de y_0 :

$$\dot{z}_0 = \frac{\omega_e}{n} y_0 \sin i \quad (2.100)$$

- Formation circulaire : La formation circulaire est celle qui permet de maintenir une distance constante entre chaque satellite de la formation en respectant la contrainte suivante :

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad (2.101)$$

où r est le rayon de la formation. Cette contrainte impose d'initialiser la formation comme suit :

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{2\dot{x}_0}{n} & z_0 &= \pm\sqrt{3}\dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 &= -2nx_0 & \dot{z}_0 &= \pm\sqrt{3}x_0 \end{aligned} \quad (2.102)$$

Les deux degrés de liberté restants, c'est-à-dire x_0 et \dot{x}_0 permettent d'ajuster le rayon de la formation et la phase du satellite esclave sur sa trajectoire circulaire par rapport au satellite chef :

$$x_0 = \left(\frac{r}{2}\right) \cos \phi \quad \dot{x}_0 = -\left(\frac{rn}{2}\right) \sin \phi \quad (2.103)$$

- Formation circulaire projetée : Celle-ci est semblable à la formation circulaire. La seule différence est que la formation circulaire projetée maintient une distance fixe seulement dans le plan y-z :

$$y^2 + z^2 = r^2 \quad (2.104)$$

Les conditions initiales à utiliser deviennent alors :

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{2\dot{x}_0}{n} & z_0 &= \pm 2\dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 &= -2nx_0 & \dot{z}_0 &= \pm 2x_0 \end{aligned} \quad (2.105)$$

Les conditions initiales x_0 et \dot{x}_0 servent encore une fois à ajuster le rayon et la phase de la trajectoire circulaire projetée. Elles sont calculées de la même manière qu'avec une formation circulaire.

2.6.2. Formations forcées ou artificielles

Les formations forcées, non naturelles ou artificielles n'utilisent pas la dynamique naturelle du mouvement relatif pour se maintenir. En fait, il est nécessaire de maintenir la position des satellites en utilisant des actionneurs. Évidemment, il existe une infinité de formations qui correspondent à cette catégorie. La forme géométrique que décrivent les satellites est souvent nommée polyèdre. Quelques missions utilisent ce type de formation, telle celle présentée dans l'article (Curtis 1999).

2.7. Résumé

Ce chapitre a couvert la dynamique orbitale cartésienne et par éléments d'orbite d'un satellite de manière à introduire la dynamique orbitale relative. En effet, les caractéristiques, résumées au Tableau 2.5, des modèles de Lawden, de Hill, de Hill + J2 et de Schaub ont été présentées.

Tableau 2.5 : Résumé des caractéristiques des modèles orbitaux relatifs

Modèles	Vecteur d'états	Type d'équations différentielles	Solution homogène analytique	Perturbations orbitales modélisées	Excentricité
Lawden	Cartésien	linéaires à paramètres variables	fonction de l'anomalie vraie	Aucune	$0 < e < 1$
Hill	Cartésien	linéaires à paramètres constants	fonction du temps	Aucune	$e = 0$
Hill+J2	Cartésien	linéaires à paramètres constants	fonction du temps	J2	$e = 0$
Schaub	Éléments d'orbite	Non applicable	fonction de l'anomalie vraie	Aucune	$0 < e < 1$

De plus, la démonstration de ces derniers a été effectuée. Enfin, certains de ces modèles ont été comparés au modèle non linéaire d'une formation de satellites afin de valider leur efficacité. En ce sens, le modèle relatif cartésien de Lawden s'est avéré être équivalent au modèle par éléments d'orbite de Schaub. De plus, il a été démontré expérimentalement sur le modèle de Hill que la précision des modèles linéarisés se dégrade rapidement lorsque la distance relative entre les satellites augmente. Ces modèles sont à la base de la conception des lois de commande et de guidage d'une formation de satellites.

CHAPITRE 3

Lois de commande d'une formation de satellites

Ce chapitre présente quelques méthodes pour asservir une formation de satellites. Ce résumé de la littérature ne se veut pas une étude exhaustive de toutes les méthodes existantes. Il s'agit plutôt de celles étudiées par l'auteur pour cerner les types de lois de commande pour lesquelles il serait utile de contribuer. Ces dernières sont organisées dans le schéma montré à la Figure 1.1.

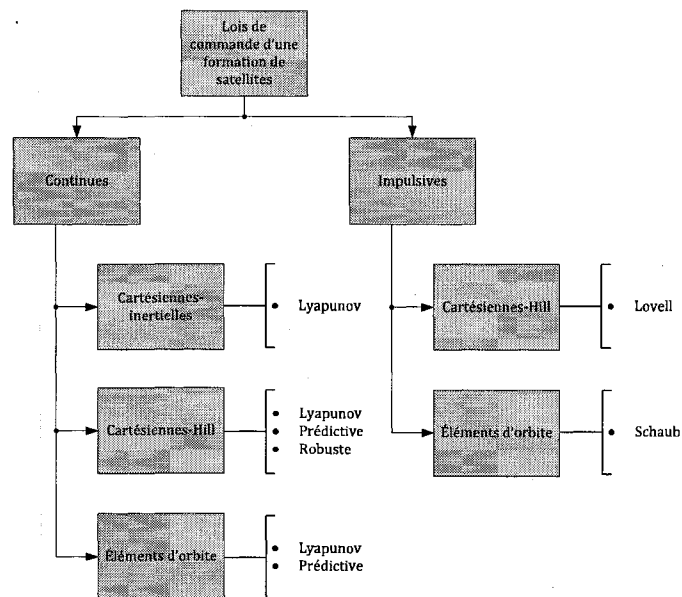


Figure 3.1 : Organigramme de la théorie concernant les lois de commande pour les formations de satellites

En fait, toutes les lois de commande d'une formation de satellites peuvent être classées dans deux catégories, c'est-à-dire continues et impulsives. La première catégorie implique l'utilisation de commandes continues dans le temps et nécessite l'utilisation de propulseurs à poussée variable. Les lois de commande de cette catégorie peuvent être de trois types : cartésiennes-inertielles, cartésiennes-Hill et par éléments d'orbite. La deuxième catégorie contient les techniques qui requièrent des commandes discrètes décrites par une variation de vitesse qu'elles induisent sur le satellite. Ces lois de commande peuvent être divisées en deux types : cartésiennes-Hill et par éléments d'orbites. Ce chapitre décrit différentes lois de commande qui appartiennent à chacune de ces catégories.

3.1. Lois de commande continues cartésiennes-inertielles

Dans la littérature, peu d'auteurs utilisent cette loi de commande pour asservir une formation de satellites. En effet, elle implique une rétroaction de la position et de la vitesse inertielle du satellite esclave. La consigne ne peut donc pas être exprimée directement dans le repère de Hill. En fait, cette approche est plus couramment utilisée pour contrôler l'orbite d'un seul satellite.

Pour implémenter ce type de loi de commande, (Schaub et Junkins 2003) propose d'utiliser l'approche de Lyapunov basée sur la dynamique des satellites chef et esclave exprimée dans le repère inertiel des satellites :

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}}_c^I &= \mathbf{f}_g^I(\mathbf{r}_c^I) \\ \ddot{\mathbf{r}}_e^I &= \mathbf{f}_g^I(\mathbf{r}_e^I) + \mathbf{u}^I\end{aligned}\quad (3.1)$$

L'erreur à poursuivre est définie par :

$$\Delta \mathbf{r}^I = \mathbf{r}_e^I - (\mathbf{r}_c^I)^d \quad (3.2)$$

où \mathbf{r}_e^I et $(\mathbf{r}_c^I)^d$ sont respectivement la position inertielle mesurée et désirée du satellite esclave. En utilisant ce signal d'erreur et sa dérivée, la fonction Lyapunov V , définie positive, peut être établie :

$$V = \frac{1}{2} \Delta(\dot{\mathbf{r}}^I)^T \Delta \dot{\mathbf{r}}^I + \frac{1}{2} \Delta(\mathbf{r}^I)^T \mathbf{K}_1 \Delta \mathbf{r}^I \quad (3.3)$$

où \mathbf{K}_1 est une matrice de gain de rétroaction définie positive de dimensions 3×3 . En prenant la dérivée de V , l'équation (3.4) est obtenue.

$$\dot{V} = (\Delta \dot{\mathbf{r}}^I)^T (\ddot{\mathbf{r}}_e^I - (\ddot{\mathbf{r}}_c^I)^d + \mathbf{K}_1 \Delta \mathbf{r}^I) \quad (3.4)$$

En utilisant l'équation (3.1), l'équation précédente devient :

$$\dot{V} = (\Delta \dot{\mathbf{r}}^I)^T (\mathbf{f}_g^I(\mathbf{r}_e^I) - \mathbf{f}_g^I((\mathbf{r}_c^I)^d) + \mathbf{u}^I + \mathbf{K}_1 \Delta \mathbf{r}^I) \quad (3.5)$$

Pour assurer la stabilité de la loi de commande, cette équation doit être définie négative. Par conséquent, en forçant \dot{V} à la grandeur $-\Delta(\dot{\mathbf{r}}^I)^T \mathbf{K}_2 \Delta \dot{\mathbf{r}}^I$ la loi de commande suivante est obtenue :

$$\mathbf{u}^I = -(\mathbf{f}_g^I(\mathbf{r}_e^I) - \mathbf{f}_g^I((\mathbf{r}_c^I)^d)) - \mathbf{K}_1 \Delta \mathbf{r}^I - \mathbf{K}_2 \Delta \dot{\mathbf{r}}^I \quad (3.6)$$

Celle-ci peut être linéarisée pour faciliter son implémentation :

$$\mathbf{f}_g^I(\mathbf{r}_e^I) - \mathbf{f}_g^I((\mathbf{r}_c^I)^d) \approx \left. \frac{\partial \mathbf{f}_g^I}{\partial \mathbf{r}} \right|_{\mathbf{r}=(\mathbf{r}_c^I)^d} \Delta \mathbf{r}^I = \nabla \mathbf{f}_g^I((\mathbf{r}_c^I)^d) \Delta \mathbf{r}^I \quad (3.7)$$

Par conséquent, la loi de commande de l'équation (3.6) devient :

$$\mathbf{u}^I = -(\nabla \mathbf{f}_g^I((\mathbf{r}_c^I)^d) \Delta \mathbf{r}^I + \mathbf{K}_1) \Delta \mathbf{r}^I - \mathbf{K}_2 \Delta \dot{\mathbf{r}}^I \quad (3.8)$$

Les auteurs ont démontrés en pratique que cette approche donne lieu à un effort de commande considérable. En fait, elle semble être mieux adaptée aux manœuvres rapides.

3.2. Lois de commande continue cartésienne-Hill

Ce type de lois de commande est basé sur la dynamique relative d'une formation de satellites. La consigne est donc directement spécifiée dans le repère de Hill. Les sections qui suivent présentent les lois de commande les plus utilisées de cette catégorie : Lyapunov, robuste et prédictive.

3.2.1. Loi de commande de Lyapunov

La loi de commande de Lyapunov, développée encore une fois dans le volume de (Schaub et Junkins 2003), utilise une rétroaction de l'erreur relative exprimée dans le repère de Hill :

$$\Delta \mathbf{d}^H = \mathbf{d}^H - (\mathbf{d}^H)^d \quad (3.9)$$

$$\Delta \dot{\mathbf{d}}^H = \dot{\mathbf{d}}^H - (\dot{\mathbf{d}}^H)^d \quad (3.10)$$

où \mathbf{d}^H et $(\mathbf{d}^H)^d$ correspondent respectivement à la position mesurées et désirées. Cette loi de commande est basée sur la dynamique de Lawden ou de Hill présentée dans la Section 2.4 et réécrite ici :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{d}}^H &= \mathbf{A}_1^c \mathbf{d}^H + \mathbf{B}_1^c \mathbf{u}^H \\ \ddot{\mathbf{d}}^H &= \mathbf{A}_2^c \dot{\mathbf{d}}^H + \mathbf{B}_2^c \mathbf{u}^H \end{aligned} \quad (3.11)$$

Pour obtenir le vecteur de commande \mathbf{u}^H en fonction de l'erreur relative qui assure la stabilité du système, il suffit d'établir la fonction Lyapunov définie positive montrée à l'équation suivante :

$$V = \frac{1}{2} \Delta (\dot{\mathbf{d}}^H)^T \Delta \dot{\mathbf{d}}^H + \frac{1}{2} \Delta (\mathbf{d}^H)^T \mathbf{K}_3 \Delta \mathbf{d}^H \quad (3.12)$$

où \mathbf{K}_3 est une matrice de gain définie positive de dimensions 3×3 . En dérivant V , l'équation (3.12) devient :

$$\dot{V} = \Delta (\dot{\mathbf{d}}^H)^T (\Delta \ddot{\mathbf{d}}^H + \mathbf{K}_3 \Delta \dot{\mathbf{d}}^H) \quad (3.13)$$

En substituant l'équation (3.11) dans l'équation précédente et en forçant cette dernière à $-\Delta (\dot{\mathbf{d}}^H)^T \mathbf{K}_4 \Delta \dot{\mathbf{d}}^H$, l'équation suivante est obtenue :

$$-\Delta (\dot{\mathbf{d}}^H)^T \mathbf{K}_4 \Delta \dot{\mathbf{d}}^H = \Delta (\dot{\mathbf{d}}^H)^T (\mathbf{A}_{ss,1}^c \mathbf{d}^H + \mathbf{A}_{ss,2}^c \dot{\mathbf{d}}^H + \mathbf{u}^H - \ddot{\mathbf{d}}^{H*} + \mathbf{K}_3 \Delta \mathbf{d}^H) \quad (3.14)$$

où \mathbf{K}_4 est une matrice de gain définie positive. Il reste à mettre \mathbf{u}^H en évidence :

$$\mathbf{u}^H = (\ddot{\mathbf{d}}^H)^* - \mathbf{A}_1^c \mathbf{d}^H - \mathbf{A}_2^c \dot{\mathbf{d}}^H - \mathbf{K}_4 \Delta \dot{\mathbf{d}}^H - \mathbf{K}_3 \Delta \mathbf{d}^H \quad (3.15)$$

Si le mouvement relatif désiré est naturel, c'est-à-dire que $(\ddot{\mathbf{d}}^H)^d = \mathbf{A}_1^c (\mathbf{d}^H)^d + \mathbf{A}_2^c (\dot{\mathbf{d}}^H)^d$, la loi de commande devient :

$$\mathbf{u}^H = [\mathbf{A}_1^c + \mathbf{K}_3 \quad \mathbf{A}_2^c + \mathbf{K}_4] \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{d}^H \\ \Delta \dot{\mathbf{d}}^H \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Bien que cette loi de commande soit facile à implémenter, il est difficile de déterminer les matrices \mathbf{K}_3 et \mathbf{K}_4 de façon à obtenir des performances optimales.

3.2.2. Loi de commande prédictive

La commande prédictive utilise les états actuels du système pour faire la prédiction de son comportement sur un horizon fini, à l'aide de son modèle pour calculer la commande optimale selon une fonction coût. (Tillerson et How 2001) propose d'utiliser ce principe pour reconfigurer et maintenir une formation de satellites en utilisant le modèle de Lawden. La section qui suit présente l'approche qu'il propose.

Cette loi de commande est basée sur le modèle de Lawden discret montré à l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1|k) &= \mathbf{A}_{LAW}(k)\mathbf{x}(k|k) + \mathbf{B}_{LAW}(k)\mathbf{u}^H(k) \\ \mathbf{y}(k+1|k) &= \mathbf{C}_{LAW}\mathbf{x}(k+1|k) + \mathbf{D}_{LAW}\mathbf{u}^H(k) \end{aligned} \quad (3.17)$$

où $\mathbf{C}_{LAW} = \mathbf{I}$, $\mathbf{D}_{LAW} = \mathbf{0}$. Il est à noter que ce modèle doit être discrétisé à chaque pas en temps étant donné que celui-ci est à paramètres variant dans le temps. La plupart des auteurs proposent d'utiliser une discrétisation avec bloqueur d'ordre zéro. Ce modèle discret permet d'établir l'équation de prédiction. Celle-ci exprime mathématiquement la valeur future des sorties du système, en fonction de la séquence future de commande et de la réponse naturelle future, calculée à partir de l'état actuel du système :

$$\mathbf{y}_N = \mathbf{G}_{ss,y,k,N}\mathbf{u}_N + \mathbf{f}_{ss,y,k,N} \quad (3.18)$$

où $\mathbf{u}_N = [\mathbf{u}^H(k|k)^T \quad \mathbf{u}^H(k+1|k)^T \quad \dots \quad \mathbf{u}^H(k+N-2|k)^T \quad \mathbf{u}^H(k+N-1|k)^T]^T$, $\mathbf{y}_N = [\mathbf{y}(k+1|k)^T \quad \mathbf{y}(k+2|k)^T \quad \dots \quad \mathbf{y}(k+N-1|k)^T \quad \mathbf{y}(k+N|k)^T]^T$, la matrice des paramètres de Markov $\mathbf{G}_{ss,y,k,N}$ permet d'obtenir la prédiction de la réponse forcée de la dynamique, le vecteur $\mathbf{f}_{ss,y,k,N}$ correspond à la prédiction de la réponse naturelle du système et N est l'horizon de prédiction. Finalement, cette équation de prédiction peut être utilisée dans un programme d'optimisation linéaire qui permet d'obtenir la séquence de commande qui minimise la consommation de propergol. En fait, pour une manœuvre de reconfiguration, ceci se traduit par :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}_N} \sum_{j=1}^m c_j |\mathbf{u}_{N,j}|, \quad \text{sujet à} \\ \mathbf{y}^*(k+N) = \mathbf{G}_{ss,N,k}\mathbf{u}_N + \mathbf{f}_{ss,N,k} \end{aligned} \quad (3.19)$$

où $\mathbf{y}^*(k+N)$ est la position relative finale désirée, c_j est l'élément j d'une matrice ligne de pondération. Pour le maintien d'une formation, l'erreur relative future doit être maintenue à l'intérieur d'une tolérance en minimisant, encore une fois, le propergol nécessaire :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}_N} \sum_{j=1}^m c_j |\mathbf{u}_{N,j}|, \quad \text{sujet à} \\ |\mathbf{y}(k+j) - \mathbf{y}^*(k+j)| \leq \epsilon_j, \quad j = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (3.20)$$

où ϵ_j définit la borne maximale de l'erreur. D'autres contraintes pourraient être ajoutées au problème. Par exemple, il serait possible de limiter la variation ou l'amplitude maximale de la

commande de façon à respecter les caractéristiques des actionneurs du satellite. Ces programmes linéaires sont résolus avec la fonction « linprog » disponible dans MATLAB®.

Cette stratégie est avantageuse, car elle considère explicitement la consommation de carburant et peut gérer différents types de contraintes. Cependant, elle possède quelques inconvénients. Premièrement, la solution du problème d'optimisation ne possède pas toujours de solution. Deuxièmement, la stabilité ne peut être démontrée. Troisièmement, l'utilisation de la fonction « linprog » demande beaucoup de puissance de calcul, et ce, surtout lorsque l'horizon de prédiction est élevé. Bref, ces lacunes ne permettent pas d'utiliser cette loi de commande pour des missions autonomes. Quatrièmement, la stratégie proposée utilise deux lois de commande différentes pour la reconfiguration et le maintien d'une formation. Finalement, les manœuvres de reconfiguration ne peuvent pas être réalisées sur plusieurs orbites, car cela demanderait un horizon de prédiction très élevé qui rendrait l'optimisation impossible.

3.2.3. Loi de commande robuste

Quelques auteurs ont développé des lois de commande robustes pour le vol en formation basées sur le modèle de Lawden présenté à la Section 2.4.2. Cette stratégie permet d'obtenir une loi de commande dont la stabilité et la performance peuvent être démontrées facilement.

La synthèse de ce type de compensateur est décrite dans le volume de (Alazard, Cumer et al. 1999). Cependant, avant de présenter les grandes lignes de cette technique, il faut introduire le concept de la transformation linéaire fractionnelle (LFT). Cette représentation mathématique permet d'exprimer n'importe quel système d'équations rationnelles (dynamique ou statique) en fonction de ces paramètres incertains ou variants, notés Δ . En fait, pour les matrices de dimensions appropriées Δ et $M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$ et en supposant que leur inverse existe, la LFT supérieure $F_u(\dots, \dots)$ est définie par l'équation (3.21).

$$F_u(M, \Delta) = M_{21}\Delta(I - M_{11})^{-1}M_{12} + M_{22} \quad (3.21)$$

Schématiquement, cette LFT est montrée à la Figure 3.2.

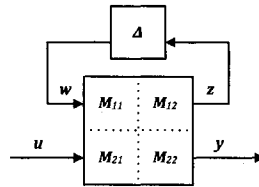


Figure 3.2 : Représentations schématique d'une LFT

Pour obtenir la LFT du modèle de Lawden (Gaulocher, Chrétien et al. 2004) proposent d'utiliser le changement de variable définie à l'équation suivante :

$$\delta = \frac{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) + 1} \quad (3.22)$$

Les fonctions trigonométriques $\sin \theta$ et $\cos \theta$ peuvent alors être exprimées en fonction du paramètre δ sous forme de fonction rationnelle :

$$\sin(\theta) = \frac{1 - \delta^2}{1 + \delta^2}, \cos(\theta) = \frac{-2\delta}{1 + \delta^2} \quad (3.23)$$

La LFT du modèle de Lawden peut donc être formée en utilisant la boîte à outils de (Magni 2004) de manière à ce que celui-ci soit exprimé en fonction du paramètre δ lié à l'anomalie vraie de l'orbite. Le modèle de Lawden peut donc être considéré comme linéaire invariant dans le temps, possédant une incertitude paramétrique. Il faut donc synthétiser une loi de commande robuste (en stabilité et en performance) sur toute la gamme d'incertitudes du modèle.

Pour obtenir cette loi de commande (Gaulocher, Chrétien et al. 2004; Brazeau, Simard Bilodeau et al. 2008) proposent d'utiliser le système augmenté montré à la Figure 3.3,

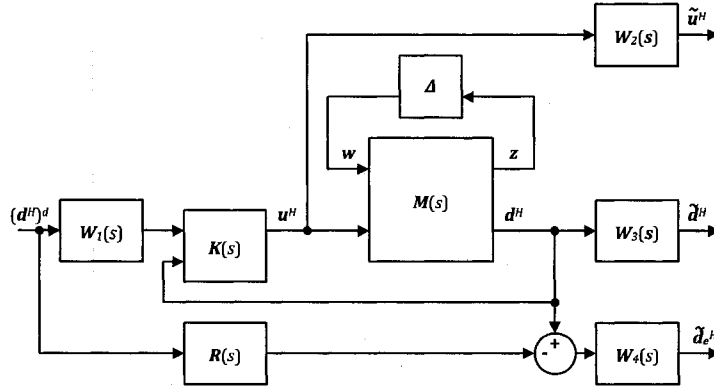


Figure 3.3 : Système augmenté utilisé pour la synthèse des lois de commande robuste pour les formations de satellites

où $K(s)$ correspond au compensateur robuste, $R(s)$ est un système qui décrit le comportement idéal désiré de la formation, $(d^H)^d$ est la position relative désirée du satellite, u^H est la commande exprimée dans le repère de Hill, d^H est la position relative mesurée du satellite, d_e^H est l'erreur entre le modèle et les pôles désirés. Ces signaux doivent être normalisés de manière à définir les sorties de performances \tilde{u}^H , \tilde{d}^H et \tilde{d}_e^H . Les pondérations sont définies par les fonctions de transfert $W_1(s)$, $W_2(s)$, $W_3(s)$ et $W_4(s)$. En fait, il faut calculer les paramètres des compensateurs $K(s)$ qui minimisent la norme H_∞ des sorties de performance pour quelques valeurs de Δ distribuées adéquatement sur sa plage de variation. La synthèse de la loi de commande est complexe et nécessite l'utilisation de la boîte à outils de commande robuste disponible dans MATLAB®. La stabilité

et la performance de chacun des compensateurs peuvent être démontrées sur l'intervalle qu'ils couvrent en utilisant les techniques de μ -analyse expliquées dans le volume de (Alazard, Cumer et al. 1999). Cette technique utilise la LFT du modèle à asservir de façon à déterminer la plus petite valeur singulière de Δ qui rend le système instable ou non performant. Dans le cas où cette valeur n'est pas dans l'intervalle de variation de Δ , le système est considéré comme robustement stable ou performant selon le critère étudié. Pour implémenter les compensateurs, ceux-ci sont discrétisés et les paramètres de ce dernier sont interpolés en fonction de l'anomalie vraie du satellite chef.

Cette technique est attirante, car elle permet d'obtenir facilement un compensateur stable et performant en utilisant simplement les outils MATLAB®. Cependant, celle-ci possède des lacunes considérables. Premièrement, elle n'est pas optimale au sens du temps de stabilisation et de la consommation de carburant. Deuxièmement, les conclusions quant à la stabilité et la performance du compensateur sont grandement influencées par le choix des fonctions de pondération effectué arbitrairement. Troisièmement, le compensateur est difficile à discrétiser, car il possède des pôles très rapides et très lents. Finalement, pour faire l'interpolation des compensateurs, il faut que ceux-ci soient exprimés dans la même base, c'est-à-dire que leur vecteur d'états soit le même. Or, les algorithmes de synthèse mènent souvent vers des solutions exprimées dans différentes bases et il est très difficile d'uniformiser leur représentation.

3.3. Loi de commande continue par éléments d'orbite

Ce type de loi de commande utilise une rétroaction de l'erreur entre les éléments d'orbite mesurés et désirés du satellite esclave. Cette section présente deux approches intéressantes : Lyapunov et prédictive.

3.3.1. Lyapunov

La loi de commande de Lyapunov, développée par (Schaub et Junkins 2003), est basée sur les équations de variation de Gauss présentées à la Section 2.3 et reportées ci-dessous :

$$\dot{e} = A_{GVE}^c(e) + B_{GVE}^c(e)u^H \quad (3.24)$$

Les éléments d'orbite désirés du satellite esclave sont définis par :

$$e_e^d = e_c + \delta e^d \quad (3.25)$$

où e_c correspond aux éléments d'orbite du satellite de chef non commandés et δe^d est la différence désirée des éléments d'orbite entre ceux du satellite esclave et chef. Les erreurs à poursuivre sont définies par :

$$\Delta e = e_e - e_e^d \quad (3.26)$$

Encore une fois, la théorie de la commande de Lyapunov peut être utilisée pour développer une loi de commande qui assure la stabilité de l'asservissement. La fonction de Lyapunov définie positive correspondant à cette loi est montrée à l'équation suivante :

$$V = \frac{1}{2} \Delta e^T \Delta e \quad (3.27)$$

En dérivant V par rapport au temps, l'équation précédente devient :

$$\dot{V} = \Delta e^T \dot{\Delta e} = \Delta e^T (A_{GVE}^c(e_e) - A_{GVE}^c(e_e^d) + B_{GVE}^c(e_e) u^H) \quad (3.28)$$

En forçant cette fonction à $-\Delta e^T P \Delta e$ pour qu'elle soit négativement définie, il est possible d'obtenir la contrainte qui assure la stabilité du modèle au sens de Lyapunov :

$$B_{GVE}^c(e_e) u^H = A_{GVE}^c(e_e) - A_{GVE}^c(e_e^d) + P \Delta e \quad (3.29)$$

où P est une matrice de gains de rétroaction définie positive dont le choix est expliqué plus loin. La solution de ce système d'équations pour la commande u ne peut être obtenue, car celui-ci est surdéterminé. En effet, le modèle possède trois entrées pour asservir six éléments d'orbite. Il faut donc utiliser l'inverse au sens des moindres carrés :

$$u^H = -(A_{GVE}^c(e_e)^T B_{GVE}^c(e_e))^{-1} B_{GVE}^c(e_e)^T (A_{GVE}^c(e_e) - A_{GVE}^c(e_e^d) + P \Delta e) \quad (3.30)$$

Cependant, cette stratégie ne permet plus d'assurer la stabilité de la loi de commande. En fait, la stabilité devrait être vérifiée en simulation. Pour diminuer la complexité des calculs, il est possible de linéariser les équations de variation de Gauss autour des éléments d'orbite désirés. En fait, la version linéaire des termes $A(e_e) - A(e_e^d)$ est démontrée à l'équation suivante :

$$A_{GVE}^c(e_e) - A_{GVE}^c(e_e^d) \approx \left. \frac{\partial A(e)}{\partial e} \right|_{e=e_e^d} \Delta e = A_{GVEL}^c(e_e^d) \Delta e \quad (3.31)$$

où la matrice $A_{GVE}^*(e_e^d)$ est définie par :

$$A_{GVEL}^c(e_e^d) = \begin{bmatrix} 0_{5 \times 5} & 0_{5 \times 1} \\ -\frac{3n^d}{2a^d} & 0_{1 \times 5} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

En introduisant l'équation précédente dans l'équation (3.30), la loi de commande devient :

$$u^H = -(B_{GVE}^c(e_e)^T B_{GVE}^c(e_e))^{-1} B_{GVE}^c(e_e)^T (A_{GVEL}^c(e_e^d) + P) \Delta e \quad (3.33)$$

La performance de la loi de commande dépend du choix du gain P . Il existe une multitude de stratégies pour établir la valeur de cette matrice. (Schaub et Junkins 2003) proposent d'utiliser une matrice diagonale :

$$\begin{aligned} P_{11} &= P_{a0} + P_{a1} \cos^N\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ P_{22} &= P_{e0} + P_{e1} \cos^N(\theta) \\ P_{33} &= P_{i0} + P_{i1} \cos^N(u) \\ P_{44} &= P_{\Omega 0} + P_{\Omega 1} \sin^N(u) \\ P_{55} &= P_{\omega 0} + P_{\omega 1} \sin^N(\theta) \\ P_{66} &= P_{M0} + P_{M1} \sin^N(\theta) \end{aligned} \quad (3.34)$$

où N est un entier pair. Les gains de rétroaction de la loi de commande deviennent donc maximaux lorsque l'élément d'orbite correspondant est le plus contrôlable et minimaux lorsque qu'ils le sont moins. La valeur de N est choisie pour déterminer la vitesse de montée et de descente des valeurs des gains.

3.3.2. Prédictive

(Breger et How 2004; Breger et How 2005) appliquent exactement la même stratégie que celle présentée la Section 3.2.2, mais en utilisant les équations de variation de Gauss présentées dans la Section 3.3.1.

3.4. Loi de commande impulsive

Ce type de loi de commande détermine l'amplitude d'une série d'impulsion à effectuer à des moments stratégiques pour annuler l'erreur relative entre deux satellites d'une formation. Cette section présente deux approches. La première, développée par (Lovell 2003), utilise l'erreur relative exprimée dans le repère de Hill tandis que la deuxième, proposée par (Schaub et Junkins 2003), repose sur l'erreur des éléments d'orbite du satellite esclave.

3.4.1. Lovell

(Lovell 2003) propose une loi de commande basée directement sur la solution paramétrique du modèle de Hill présenté à la Section 2.4.3. Celle-ci concerne seulement le mouvement relatif dans le plan. En fait, cette loi de commande permet d'effectuer des manœuvres de reconfiguration d'une formation dans le plan qui dérive définie par (a_{e1}, y_{d1}, x_{d1}) vers une formation désirée stationnaire (a_{e2}, y_{d2}) . Pour ce faire, (Lovell 2003) démontre que seulement trois impulsions, séparées par une moitié d'orbite débutant au périégée, sont nécessaires. La variation de vitesse de ces impulsions est calculée par l'algorithme suivant :

$$\begin{aligned}\Delta V_1 &= \frac{n}{16}\Delta a - \frac{n}{6\pi}\Delta y - \frac{3}{8}nx_d \\ \Delta V_2 &= -\frac{n}{8}\Delta a + \frac{1}{4}nx_d \\ \Delta V_3 &= -\frac{n}{16}\Delta a + \frac{n}{6\pi}\Delta y + \frac{1}{8}nx_d\end{aligned}\tag{3.35}$$

où $\Delta a = a_{e2} - a_{e1}$, $\Delta y = y_{d2} - y_{d1}$ et $x_{d1} = x_d$.

Cette approche est très simple, mais très limitée. Elle ne supporte pas les formations sur une orbite excentrique et les formations hors du plan. De plus, comme toutes les méthodes impulsives, elle suppose de faire intervenir une impulsion d'amplitude infinie et d'une durée infinitésimale impossible à reproduire en pratique.

3.4.2. Schaub

(Schaub et Junkins 2003) proposent d'utiliser les équations de variation de Gauss, présentées à l'équation (2.39) pour définir une loi de commande impulsive. En fait, cette loi de commande permet de reconfigurer des formations de satellites naturelles définies en termes de différence d'éléments d'orbite. Pour l'obtenir, il faut établir que les accélérations radiale, transversale et normale correspondent à des impulsions, c'est-à-dire que $f_{p,r} = \Delta v_r$, $f_{p,\theta} = \Delta v_\theta$ et $f_{p,n} = \Delta v_n$. De cette manière, les équations de variation de Gauss deviennent :

$$\begin{aligned}\Delta a &= \frac{2a^2}{h} \left(e \sin(\theta) \Delta v_r + \frac{p}{r} \Delta v_\theta \right) \\ \Delta M &= n + \frac{b}{ahe} \left((p \cos(\theta) - 2re) \Delta v_r - (p+r) \sin(\theta) \Delta v_\theta \right) \\ \Delta i &= \frac{r \cos(u)}{h} \Delta v_n \\ \Delta e &= \frac{1}{h} \left(p \sin(\theta) \Delta v_r + ((p+r) \cos(\theta) + re) \Delta v_\theta \right) \\ \Delta \omega &= \frac{1}{he} \left(-p \cos(\theta) \Delta v_r + (p+r) \sin(\theta) \Delta v_\theta \right) - \frac{r \sin(u) \cos(i)}{h \sin(i)} \Delta v_n \\ \Delta \Omega &= \frac{r \sin(u)}{h \sin(i)} \Delta v_n\end{aligned}\tag{3.36}$$

Rapidement, il est possible de constater qu'une erreur d'inclinaison i ou de nœud ascendant droit Ω , peut être corrigée par une impulsion normale au plan de l'orbite, appliquée respectivement dans la région équatoriale et polaire de l'orbite. Cependant, il a été démontré qu'il est plus économique en carburant de faire une seule impulsion pour corriger les erreurs sur ces deux éléments d'orbite. Cette correction s'effectue à l'argument de latitude critique défini par :

$$u_c = \tan^{-1} \frac{\Delta \Omega \sin(i)}{\Delta i}\tag{3.37}$$

où $\Delta \Omega$ et Δi correspondent respectivement à la correction du Ω et de i désirée. La variation de vitesse de cette impulsion peut être calculée en appliquant l'équation suivante :

$$\Delta v_h = \frac{h}{r} \sqrt{\Delta i^2 + \Delta \Omega^2 \sin^2(i)}\tag{3.38}$$

Les erreurs de l'argument du périégée et de l'anomalie moyenne sont aussi corrigées ensemble. Cependant, la manœuvre requiert deux impulsions radiales dont une effectuée au périégée Δv_{r_p} et l'autre à l'apogée Δv_{r_a} de l'orbite du satellite esclave. Ces corrections causent les changements définis aux équations (3.39) et (3.40) et s'effectuent sur une période orbitale.

$$\Delta \omega = -\frac{p}{he} (\Delta v_{r_p} - \Delta v_{r_a}) - \Delta \Omega \cos(i)\tag{3.39}$$

$$\Delta M = \frac{\eta}{he} \left((p - 2r_p e) \Delta v_{r_p} - (p + 2r_a e) \Delta v_{r_a} \right)\tag{3.40}$$

En posant $p - 2r_p e = p \frac{1-e}{1+e}$, $p + 2r_a e = p \frac{1+e}{1-e}$ et $\frac{h}{p} = \frac{na}{\eta}$, les équations (3.39) et (3.40) deviennent respectivement :

$$\Delta v_{r_p} - \Delta v_{r_a} = -\frac{nae}{\eta}(\Delta\omega + \Delta\Omega \cos(i)) \quad (3.41)$$

$$(1-e)^2\Delta v_{r_p} - (1+e)^2\Delta v_{r_a} = nae\Delta M \quad (3.42)$$

En résolvant ce système d'équations pour Δv_{r_p} et Δv_{r_a} , les équations suivantes sont obtenues.

$$\Delta v_{r_p} = \frac{na}{4} \left(\frac{(1+e)^2}{\eta} (\Delta\omega + \Delta\Omega \cos(i)) - \Delta M \right) \quad (3.43)$$

$$\Delta v_{r_a} = -\frac{na}{4} \left(\frac{(1-e)^2}{\eta} (\Delta\omega + \Delta\Omega \cos(i)) + \Delta M \right) \quad (3.44)$$

De la même manière, une erreur de l'axe semi-majeur et de l'excentricité peuvent être corrigées par deux impulsions transversales Δv_{θ_p} et Δv_{θ_a} respectivement fournies au périée et à l'apogée dans une période orbitale :

$$\Delta a = \frac{2a^2}{h} \left(\frac{p}{r_p} \Delta v_{\theta_p} + \frac{p}{r_a} \Delta v_{\theta_a} \right) \quad (3.45)$$

$$\Delta e = \frac{1}{h} \left((p + r_p + r_p e) \Delta v_{\theta_p} + (-p - r_a + r_a e) \Delta v_{\theta_a} \right) \quad (3.46)$$

Sachant que $p + r_p + r_p e = 2p$ et que $-p - r_a + r_a e = -2p$, les équations (3.45) et (3.46) deviennent :

$$(1+e)\Delta v_{\theta_p} + (1-e)\Delta v_{\theta_a} = \frac{h\Delta a}{2a^2} \quad (3.47)$$

$$\Delta v_{\theta_p} - \Delta v_{\theta_a} = \frac{h}{2p} \Delta e \quad (3.48)$$

Ces deux équations peuvent être solutionnées pour Δv_{θ_p} et Δv_{θ_a} de façon à obtenir :

$$\Delta v_{\theta_p} = \frac{na\eta}{4e} \left(\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta e}{1+e} \right) \quad (3.49)$$

$$\Delta v_{\theta_a} = \frac{na\eta}{4} \left(\frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta e}{1-e} \right) \quad (3.50)$$

Cette loi de commande est optimale en terme de consommation de carburant si elle est utilisée pour corriger l'erreur de seulement un ou deux éléments d'orbite à la fois. De plus, ce genre de manœuvre demande très peu de calcul et peut donc être utilisée de manière autonome par un satellite. Cependant, elle possède plusieurs inconvénients. Premièrement, lorsque plusieurs ou tous les éléments d'orbite doivent être corrigés, la séquence d'impulsion qui mène vers une consommation optimale est complexe à obtenir et il existe peu de littérature sur ce sujet. Deuxièmement, il faut comprendre que cette loi est développée sous l'hypothèse que les impulsions sont d'amplitude infiniment élevée et d'une durée infiniment petite. Il est malheureusement impossible de reproduire ce genre d'impulsion dans la réalité. Les impulsions devront donc s'étendre sur un intervalle de temps. Cette situation occasionnera nécessairement des erreurs sur d'autres éléments d'orbite durant la manœuvre, qui devront être corrigées dans le futur. Finalement, la loi de commande implique souvent deux manœuvres, c'est-à-dire une au périée et une autre à l'apogée. La variation

de vitesse des impulsions est calculée en fonction de la correction à réaliser, mais aussi en fonction des éléments d'orbite du satellite avant la correction. La loi de commande suppose que ces éléments d'orbite conserveront leur valeur après la première impulsion, contrairement à ce qui se passe dans la réalité. Selon (Schaub et Junkins 2003), la loi de commande est donc valide seulement pour corriger de petites erreurs. Cependant, (Kron, Ulrich et al. 2008) ont démontré l'inverse expérimentalement.

3.5. Résumé

Plusieurs lois de commande cartésiennes et par éléments d'orbites, continues et impulsives ont été présentées. Leurs avantages et leurs inconvénients ont aussi été mis en évidence. Ce travail a permis au candidat d'identifier les lois de commande pour lesquelles il serait utile de contribuer. En lien avec ce qui précède, les lois de commande de Lyapunov cartésienne-Hill et par éléments d'orbite proposées par (Schaub et Junkins 2003) sont très intéressantes. En effet, celles-ci sont très simples, stables et incluent une rétroaction des états de la formation permettant de traiter directement l'erreur relative. Contrairement, aux approches prédictives de (Tillerson et How 2001; Breger et How 2004; Breger et How 2005), ces lois de commande permettent d'effectuer à la fois des manœuvres de reconfiguration et de maintenance en utilisant le même algorithme et réagissent mieux aux perturbations lors de ces manœuvres. Cependant, les lois de commande de (Schaub et Junkins 2003) ne sont pas optimales, elles sont difficiles à paramétrer et ne peuvent gérer les contraintes, telle que la force maximale allouée par les propulseurs du satellite. Il serait donc avantageux de combiner ces approches de manière à formuler des lois de commande prédictives innovatrices, incluant la poursuite de l'erreur relative par rapport à une trajectoire désirée définie par l'utilisateur pour reconfigurer ou maintenir la cohésion d'une formation. Pour ce faire, il est nécessaire de pousser plus loin, dans les prochains chapitres, l'étude de la compensation prédictive linéaire et non linéaire discrète.

CHAPITRE 4

Commande prédictive linéaire discrète

Le volume de (Camacho et Bordons 2003) présente le principe de fonctionnement d'un Compensateur Prédicatif basé sur le Modèle (MPC). Celui-ci est représenté à la Figure 4.1.

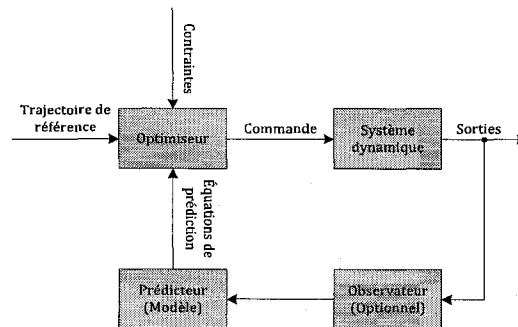


Figure 4.1: Schéma simplifié de l'algorithme d'un compensateur prédictif

Le système dynamique est le bloc central du schéma. En fait, il représente le système à commander. Celui-ci présente m entrées, n sorties et s états. Les compensateurs prédictifs se décomposent en deux parties : le prédicteur et l'optimiseur. Le prédicteur détermine la robustesse et la performance du compensateur. Son but est de prédire, à partir d'un modèle simple, les états ou les sorties du système dynamique à partir des données provenant d'un observateur d'états ou des capteurs. L'optimiseur calcule la commande du système. Pour ce faire, il minimise une fonction coût définie en fonction du signal de prédiction et de la trajectoire de référence en considérant les contraintes imposées par le concepteur (variation maximale et saturation des actionneurs, limite d'amplitude des sorties). Ce chapitre vise à décrire en détail chacun de ces blocs.

4.1. Modèle

Le modèle est la version embarquée du système dynamique. Les volumes de (Camacho et Bordons 2003; Rossiter 2003) présentent les formes de modèles les plus fréquemment utilisés, c'est-à-dire, les modèles fonctions de transfert et les modèles variables d'état. Cette section décrit brièvement en quoi consistent ces derniers.

4.1.1. Fonctions de transfert

Le modèle sous forme de fonctions de transfert discrètes le plus utilisé est nommé CARIMA, à savoir « Controlled, Auto-Regressive, Integrated, Moving Average ». La version multivariable de ce type de modèle est de la forme :

$$A(z^{-1})y(k|k) = B(z^{-1})u(k-1|k) + C_{if}(z^{-1})\frac{n(k|k)}{\Delta} \quad (4.1)$$

où z^{-1} est un délai unitaire, $y(k|k)$ représente le vecteur de sorties du système, $u(k|k)$ correspond au vecteur des entrées, $n(k|k)$ est un vecteur de bruit blanc qui représente les perturbations non mesurées qui agissent sur le système, l'opérateur Δ est défini comme étant égal à $1 - z^{-1}$, $A(z^{-1})$ et $C(z^{-1})$ sont des matrices polynomiales unitaires de dimensions $n \times n$ tandis que $B(z^{-1})$ est une matrice polynomiale de dimensions $n \times m$. Ces dernières sont présentées ci-dessous :

$$A(z^{-1}) = I_{n \times n} + A_1 z^{-1} + A_2 z^{-2} + \dots + A_{na} z^{-na} \quad (4.2)$$

$$B(z^{-1}) = B_0 + B_1 z^{-1} + B_2 z^{-2} + \dots + B_{nb} z^{-nb} \quad (4.3)$$

$$C(z^{-1}) = I_{n \times n} + C_1 z^{-1} + C_2 z^{-2} + \dots + C_{nc} z^{-nc} \quad (4.4)$$

Ce modèle devient rapidement complexe lorsque le nombre d'entrées et de sorties augmente, c'est pourquoi dans ce cas, il est préférable d'utiliser un modèle variables d'état. Ce modèle peut être obtenu expérimentalement en utilisant des méthodes d'identification ou par modélisation. La deuxième possibilité implique la discrétisation du modèle fonctions de transfert nominal. À ce moment, le concepteur choisi la matrice $C(z^{-1})$ par tâtonnement pour ajuster la robustesse de la loi de commande prédictive.

4.1.2. Modèle variables d'état

Un modèle multivariable nominal présenté sous forme de matrices d'état discrètes se présente sous la forme :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(k+1|k) \\ x_2(k+1|k) \\ \vdots \\ x_s(k+1|k) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k|k) \\ x_2(k|k) \\ \vdots \\ x_s(k|k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \dots & b_{sm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k|k) \\ u_2(k|k) \\ \vdots \\ u_m(k|k) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1(k|k) \\ y_2(k|k) \\ \vdots \\ y_m(k|k) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{ns} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k|k) \\ x_2(k|k) \\ \vdots \\ x_s(k|k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k|k) \\ u_2(k|k) \\ \vdots \\ u_m(k|k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.5)$$

où k est le temps en échantillons, $x(k|k)$, $u(k|k)$ et $y(k|k)$ correspondent respectivement aux états, aux entrées et aux sorties, les matrices A et B décrivent l'équation d'état du système et enfin, les matrices C et D forment l'équation de sorties. Ce modèle peut inclure la modélisation de deux types de perturbation à savoir celles qui interviennent sur les sorties et celles qui interviennent sur les états comme illustre la Figure 4.2.

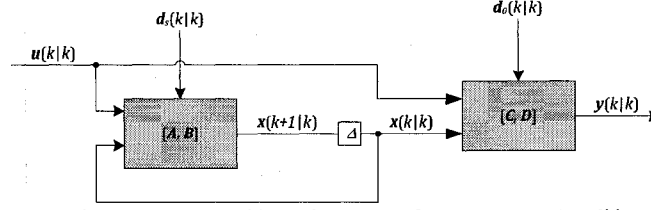


Figure 4.2: Schéma représentant un modèle linéaire sous forme de matrice d'état d'un système dynamique incluant les différentes sources de perturbations d_s et d_o

Plus précisément, les perturbations agissant sur les états du système, noté $n_s(k)$, peuvent être modélisées comme suit :

$$d_s(k+1|k) = d_s(k|k) + n_s(k|k) \quad (4.6)$$

où $n_s(k)$ est un bruit blanc. De cette manière, l'équation d'état (4.5) devient :

$$x(k+1|k) = Ax(k|k) + Bu(k|k) + Ed_s(k|k) \quad (4.7)$$

où E est une matrice qui colore les perturbations $d_s(k)$ pour mieux représenter son impact sur les états du système. Les perturbations agissant sur les sorties du système, notée $d_o(k)$, prennent la forme suivante :

$$d_o(k+1|k) = d_o(k|k) + n_o(k|k) \quad (4.8)$$

où $n_o(k)$ est un bruit blanc. En incluant ce résultat dans l'équation de sortie (4.5), il est possible d'obtenir :

$$y(k|k) = Cx(k|k) + Du(k|k) + d_o(k|k) \quad (4.9)$$

Pour certaines applications, (Camacho et Bordons 2003; Rossiter 2003) proposent d'utiliser une version augmentée du modèle variables d'état lorsque celui-ci est utilisé dans un algorithme de compensateur prédictif. Cette stratégie ajoute une action intégrale à la loi de commande, ce qui permet d'obtenir une erreur nulle en régime permanent et évite l'utilisation d'un observateur d'états destiné à filtrer les sources de bruit présentées précédemment. Le modèle montré aux équations (4.7) et (4.9) devient alors :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x(k+1|k) \\ u(k|k) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k|k) \\ u(k-1|k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ I \end{bmatrix} \Delta u(k|k) + \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix} d_s(k|k) \\ y(k|k) &= [C \quad D] \begin{bmatrix} x(k|k) \\ u(k-1|k-1) \end{bmatrix} + D \Delta u(k|k) + d_o(k|k) \end{aligned} \quad (4.10)$$

4.2. Prédiction

L'objectif de l'algorithme de prédiction d'un compensateur prédictif est d'obtenir une équation qui définit la séquence des valeurs de ses sorties futures, au temps $k+l$, où l varie de N_1 jusqu'à N_2 , en fonction des entrées futures du système, au temps $k+l$, où l varie de 0 jusqu'à N_3 , de l'information provenant des capteurs disponibles au temps k et les valeurs des entrées précédentes. Cette prédiction est notée $y(k+l|k)$, l'intervalle de temps de N_1 à N_2 définit l'horizon de prédiction et N_3 est l'horizon de commande. Il est à noter que N_2 doit être nécessairement plus grand que N_3 . Il est

évident que l'algorithme de prédiction diffère selon le modèle utilisé. Les paragraphes qui suivent présentent la procédure pour obtenir les équations de prédiction des deux modèles présentés dans la section précédente, c'est-à-dire le modèle fonctions de transfert et variables d'état.

4.2.1. Fonctions de transfert

La première partie de cette section présente l'algorithme utilisé pour obtenir la prédiction des valeurs de sorties d'un modèle fonctions de transfert en assimilant les perturbations à du bruit blanc, c'est-à-dire en utilisant $C(z^{-1}) = I_{n \times n}$. Cette considération est souvent utilisée, car il est très difficile d'obtenir ce polynôme en pratique et ce, surtout pour les systèmes multivariable. En lien avec ce qui précède, (Camacho et Bordons 2003) définit l'équation Diophantienne qui correspond à la prédiction $y(k + l|k)$:

$$I_{n \times n} = D_l(z^{-1})\tilde{A}(z^{-1}) + z^{-l}E_l(z^{-1}) \quad (4.11)$$

où $D_l(z^{-1})$, $\tilde{A}(z^{-1})$ et $E_l(z^{-1})$ sont :

$$D_l(z^{-1}) = D_{l,0} + D_{l,1}z^{-1} + D_{l,2}z^{-2} + \dots + D_{l,l-1}z^{-(l-1)} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}(z^{-1}) &= A(z^{-1})\Delta = I_{n \times n} + \tilde{A}_1z^{-1} + \tilde{A}_2z^{-2} + \dots + \tilde{A}_{na}z^{-na} + \tilde{A}_{na+1}z^{-(na+1)} \\ &= I_{n \times n} + (A_1 - I_{n \times n})z^{-1} + (A_2 - A_1)z^{-1} + \dots + (A_{na} - A_{na-1})z^{-na} - A_{na}z^{-(na+1)} \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$E_l(z^{-1}) = E_{l,0} + E_{l,1}z^{-1} + E_{l,2}z^{-2} + \dots + E_{l,na}z^{-na} \quad (4.14)$$

En multipliant l'équation (4.1) par $\Delta D_l(z^{-1})z^l$, l'équation suivante est obtenue :

$$\tilde{A}(z^{-1})D_l(z^{-1})y(k + l|k) = D_l(z^{-1})B(z^{-1})\Delta u(k + l - 1|k) + D_l(z^{-1})n(k + l|k) \quad (4.15)$$

En utilisant l'équation (4.11), l'équation (4.15) devient :

$$(I_{n \times n} - z^{-l}E_l(z^{-1}))y(k + l|k) = D_l(z^{-1})B(z^{-1})\Delta u(k + l - 1|k) + D_l(z^{-1})n(k + l|k) \quad (4.16)$$

Cette dernière peut être facilement réécrite :

$$y(k + l|k) = E_l(z^{-1})y(k|k) + D_l(z^{-1})B(z^{-1})\Delta u(k + l - 1|k) + D_l(z^{-1})n(k + l|k) \quad (4.17)$$

Cette équation permet de calculer la valeur des sorties au temps l . Par contre, pour y arriver, il faut connaître la valeur du terme $D_l(z^{-1})n(k + l|k)$ qui dépend du signal de perturbation. Heureusement, il faut seulement les valeurs futures de $n(k)$ étant donné que le degré de $D_l(z^{-1})$ est $l - 1$. Par conséquent, il est possible d'obtenir un estimé des sorties futures, notées $\bar{y}(k + l|k)$ en considérant que l'espérance mathématique, notée $E\{\}$, du signal $n(k + l|k)$ est nulle. Le résultat est montré à l'équation suivante :

$$y(k + l|k) = E\{\bar{y}(k + l|k)\} = E_l(z^{-1})y(k) + D_l(z^{-1})B(z^{-1})\Delta u(k + l - 1) \quad (4.18)$$

Cependant, pour utiliser cette équation, il faut définir les polynômes $E_l(z^{-1})$ et $D_l(z^{-1})$. En fait, (Camacho et Bordons 2003) démontrent que ceux-ci peuvent être obtenus récursivement en utilisant l'équation Diophantienne reliée à $\bar{y}(k + l + 1|k)$:

$$I_{n \times n} = D_{l+1}(z^{-1})\tilde{A}(z^{-1}) + z^{-(l+1)}E_{l+1}(z^{-1}) \quad (4.19)$$

En soustrayant l'équation (4.11) de l'équation (4.19), il est possible d'obtenir :

$$\mathbf{0}_{n \times n} = (\mathbf{D}_{l+1}(z^{-1}) - \mathbf{D}_l(z^{-1}))\tilde{\mathbf{A}}(z^{-1}) + z^{-l}(\mathbf{z}^{-1}\mathbf{E}_{l+1}(z^{-1}) - \mathbf{E}_l(z^{-1})) \quad (4.20)$$

Par la suite, il faut établir la définition suivante :

$$\mathbf{D}_{l+1}(z^{-1}) - \mathbf{D}_l(z^{-1}) = \mathbf{R}(z^{-1}) + \mathbf{R}_l z^{-l} \quad (4.21)$$

où $\mathbf{R}(z^{-1})$ est une matrice polynomiale $n \times n$ de degré plus petit ou égal à $l - 1$ et \mathbf{R}_l est une matrice $n \times n$ réelle. En utilisant l'équation précédente, l'équation (4.20) devient :

$$\mathbf{0}_{n \times n} = \mathbf{R}(z^{-1})\tilde{\mathbf{A}}(z^{-1}) + z^{-l}(\mathbf{R}_l\tilde{\mathbf{A}}(z^{-1}) + \mathbf{z}^{-1}\mathbf{E}_{l+1}(z^{-1}) - \mathbf{E}_l(z^{-1})) \quad (4.22)$$

$\mathbf{R}(z^{-1})$ doit être égale à $\mathbf{0}_{n \times n}$ pour que l'équation précédente soit respectée. Cette réalité permet d'établir l'équation suivante à partir de l'équation (4.21) :

$$\mathbf{D}_{l+1}(z^{-1}) = \mathbf{D}_l(z^{-1}) + \mathbf{R}_l z^{-l} \quad (4.23)$$

Par la suite, il est possible d'obtenir l'algorithme récursif pour calculer la matrice de coefficients \mathbf{R}_l et les polynômes $\mathbf{E}(z^{-1})$ à partir du deuxième terme du membre de droite de l'équation (4.22) :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_l &= \mathbf{E}_{l,0} \\ \mathbf{E}_{l+1,i} &= \mathbf{E}_{l,i+1} - \mathbf{R}_l \tilde{\mathbf{A}}_{i+1}, \quad i = 0 \dots \delta \mathbf{E}_{l+1} \end{aligned} \quad (4.24)$$

où δ est un opérateur qui désigne le degré du polynôme qui le suit. Les équations récursives (4.23) et (4.24) peuvent être implémentées sachant que les conditions initiales sont données par :

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_1(z^{-1}) &= \mathbf{I}_{n \times n} \\ \mathbf{E}_1(z^{-1}) &= \mathbf{z}(\mathbf{I}_{n \times n} - \tilde{\mathbf{A}}(z^{-1})) \end{aligned} \quad (4.25)$$

En posant $\mathbf{D}_l(z^{-1})\mathbf{B}(z^{-1}) = \mathbf{G}_l(z^{-1}) + z^{-l}\mathbf{G}'_l(z^{-1})$ avec $\delta \mathbf{G}_l(z^{-1}) < l$, il est possible de réécrire l'équation (4.18) :

$$\mathbf{y}(k+l|k) = \mathbf{G}_l(z^{-1})\Delta \mathbf{u}(k+l-1|k) + \underbrace{\mathbf{G}'_l(z^{-1})\Delta \mathbf{u}(k-1|k-1) + \mathbf{E}_l(z^{-1})\mathbf{y}(k|k)}_{f_l} \quad (4.26)$$

dont le premier terme du membre de droite, nommé réponse forcée du système, dépend seulement des entrées futures du système et dont les deuxième et troisième termes, nommés réponse naturelle, dépendent respectivement des entrées et des sorties passées.

Pour obtenir la loi de commande d'un compensateur prédictif, il faut effectuer la prédiction sur un ensemble de N temps futurs :

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(k+1|k) &= \mathbf{G}_1(z^{-1})\Delta \mathbf{u}(k|k) + \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{y}(k+2|k) &= \mathbf{G}_2(z^{-1})\Delta \mathbf{u}(k+1|k) + \mathbf{f}_2 \\ &\vdots \\ \mathbf{y}(k+N|k) &= \mathbf{G}_N(z^{-1})\Delta \mathbf{u}(k+N-1|k) + \mathbf{f}_N \end{aligned} \quad (4.27)$$

Ces équations peuvent être organisées sous une forme matricielle utilisée lors de l'étape d'optimisation où certaines techniques d'algèbres linéaires avancées sont requises :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{y}(k+1|k) \\ \mathbf{y}(k+2|k) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(k+l|k) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(k+N|k) \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}_N} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{g}_0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{g}_{l-1} & \mathbf{g}_{l-2} & \dots & \mathbf{g}_0 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{g}_{N-1} & \mathbf{g}_{N-2} & \dots & \dots & \dots & \mathbf{g}_0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}_{tf,N}} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}(k|k) \\ \Delta \mathbf{u}(k+1|k) \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{u}(k+l-1|k) \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{u}(k+N-1|k) \end{bmatrix}}_{\Delta \mathbf{u}_N} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_l \\ \vdots \\ \mathbf{f}_N \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}_{tf,N}} \quad (4.28)$$

où $G_l(z^{-1}) = \sum_{i=0}^{l-1} g_i z^{-i}$. Il est intéressant de faire quelques remarques sur le résultat précédent. Premièrement, lorsque les conditions initiales sont zéros, la réponse naturelle du système est nulle. Deuxièmement, en appliquant un échelon unitaire sur la première entrée du système au temps k , comme le montre l'équation (4.29), la séquence de sorties obtenue correspondra à la première colonne de la matrice $G_{tf,N}$.

$$\Delta u = [[1 \ 0 \ \dots \ 0]^T \ \Delta u(k+1|k) = 0 \ \dots \ \Delta u(k+N-1|k) = 0]^T \quad (4.29)$$

Cette réalité peut être utilisée lorsque le système est difficile à modéliser. En effet, cette matrice peut-être identifiée expérimentalement en appliquant un échelon unitaire, tour à tour, sur chacune des entrées du système de manière à noter le comportement des ses sorties sur un horizon de N . Pour ajuster indépendamment l'horizon de prédiction et de commande, comme expliqué au début de la Section 4.2, il suffit de modifier l'équation (4.28) :

$$y_{N_{12}} = G_{tf,N_{123}} \Delta u_{N_3} + f_{tf,N_{12}} \quad (4.30)$$

où $y_{N_{12}} = [\bar{y}(k+N_1|k) \ \dots \ \bar{y}(k+N_2|k)]^T$, $u_{N_3} = [\Delta u(k|k) \ \dots \ \Delta u(k+N_3-1|k)]^T$, $f_{N_{12}} = [f_{N_1} \ \dots \ f_{N_2}]^T$ et $G_{N_{123}}$ est donné par :

$$G_{tf,N_{123}} = \begin{bmatrix} g_{N_1-1} & g_{N_1-2} & \dots & g_{N_1-N_3} \\ g_{N_1} & g_{N_1-1} & \dots & g_{N_1+1-N_3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N_2-1} & g_{N_2-2} & \dots & g_{N_2-N_3} \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

Ceci permet de diminuer le nombre de calculs requis en forçant l'algorithme de prédiction à considérer seulement la partie utile de la dynamique du système. Typiquement, N_1 correspond au délai du système dynamique, c'est-à-dire le temps qui s'écoule entre l'application d'une commande et l'impact de celle-ci sur ses sorties. Finalement, N_2 et N_3 correspondent au temps de stabilisation du système contrôlé. Ces deux paramètres ne peuvent être établis avec précision, mais cette définition permet de choisir la configuration initiale du compensateur. Évidemment, celle-ci peut être adaptée selon la performance du système obtenue lors des essais pratiques.

4.2.2. Modèle variables d'état

Il est beaucoup plus facile d'obtenir l'équation de prédiction en utilisant le modèle variables d'état. En effet, (Rossiter 2003) propose d'utiliser simplement la définition de ce modèle présenté à la Section 4.1.2 et réécrite à l'équation suivante :

$$x(k+1|k) = Ax(k|k) + Bu(k|k) \quad y(k+1|k) = Cx(k+1|k) \quad (4.32)$$

Ce dernier permet d'obtenir directement la valeur future des états et des sorties du système, au temps $k+1$, à partir de $x(k|k)$ et de $u(k|k)$. De la même manière, $x(k+2|k)$ et $y(k+2|k)$ peuvent être calculés en utilisant $x(k+1|k)$ et $u(k+1|k)$:

$$x(k+2|k) = Ax(k+1|k) + Bu(k+1|k) \quad y(k+2|k) = Cx(k+2|k) \quad (4.33)$$

En substituant l'équation (4.32) dans l'équation (4.33), l'équation suivante est obtenue :

$$x(k+2|k) = A^2x(k|k) + ABu(k|k) + Bu(k+1|k) \quad y(k+2|k) = Cx(k+2|k) \quad (4.34)$$

En procédant exactement de la même façon, il est possible de définir l'équation de prédiction pour $x(k+3|k)$ et $y(k+3|k)$:

$$x(k+3|k) = Ax(k+2|k) + Bu(k+2|k) \quad y(k+3|k) = Cx(k+3|k) \quad (4.35)$$

$$x(k+3|k) = A^3x(k|k) + A^2Bu(k|k) + ABu(k+1|k) + Bu(k+2|k) \quad y(k+3|k) = Cx(k+3|k) \quad (4.36)$$

Cette démarche peut être généralisée sur un horizon de prédiction l :

$$x(k+l|k) = A^l x(k|k) + A^{l-1}Bu(k|k) + A^{l-2}Bu(k+1|k) + \dots + Bu(k+l-1|k) \quad y(k+l|k) = Cx(k+l|k) \quad (4.37)$$

En organisant la séquence de prédiction des temps $k+1$ jusqu'à $k+N$ sous forme matricielle, les équations suivantes sont obtenues.

$$\begin{bmatrix} x(k+1|k) \\ x(k+2|k) \\ \vdots \\ x(k+l|k) \\ \vdots \\ x(k+N|k) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A \\ A^2 \\ \vdots \\ A^l \\ \vdots \\ A^N \end{bmatrix}}_{f_{ss,x,N}} x(k|k) + \underbrace{\begin{bmatrix} B & 0 & 0 & \dots \\ AB & B & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A^{l-1}B & A^{l-2}B & A^{l-3}B & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A^{N-1}B & A^{N-2}B & A^{N-3}B & \dots \end{bmatrix}}_{G_{ss,x,N}} \underbrace{\begin{bmatrix} u(k|k) \\ u(k+1|k) \\ \vdots \\ u(k+l-1|k) \\ \vdots \\ u(k+N-1|k) \end{bmatrix}}_{u_N} \quad (4.38)$$

$$\begin{bmatrix} y(k+1|k) \\ y(k+2|k) \\ \vdots \\ y(k+l|k) \\ \vdots \\ y(k+N|k) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^l \\ \vdots \\ CA^N \end{bmatrix}}_{f_{ss,y,N}} x(k|k) + \underbrace{\begin{bmatrix} CB & 0 & 0 & \dots \\ CAB & CB & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ CA^{l-1}B & CA^{l-2}B & CA^{l-3}B & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ CA^{N-1}B & CA^{N-2}B & CA^{N-3}B & \dots \end{bmatrix}}_{G_{ss,y,N}} u_N \quad (4.39)$$

De la même manière qu'avec le modèle fonctions de transfert, l'équation de prédiction du modèle variables d'état permet d'ajuster l'horizon de prédiction, indépendamment de l'horizon de commande. De cette manière, l'équation (4.38) devient :

$$x_{N_{12}} = G_{ss,x,N_{123}} u_{N_3} + f_{ss,x,N_{12}} \quad (4.40)$$

où $G_{ss,x,N_{123}}$ et $f_{ss,x,N_{12}}$ sont définis par :

$$f_{ss,x,N_{12}} = \begin{bmatrix} A^{N_1} \\ A^{N_1+1} \\ \vdots \\ A^{N_2} \end{bmatrix} x(k|k) \quad (4.41)$$

$$G_{ss,x,N_{123}} = \begin{bmatrix} A^{N_1-1}B & A^{N_1-2}B & \dots & A^{N_1-N_3}B \\ A^{N_1}B & A^{N_1-1}B & \dots & A^{N_1-N_3+1}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{N_2-1}B & A^{N_2-2}B & \dots & A^{N_2-N_3}B \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

De plus, l'équation (4.39) devient :

$$y_{N_{12}} = G_{ss,y,N_{123}} u_{N_3} + f_{ss,y,N_{12}} \quad (4.43)$$

où $f_{ss,y,N_{12}}$ et $G_{ss,y,N_{123}}$ sont :

$$f_{ss,y,N_{12}} = \begin{bmatrix} CA^{N_1} \\ CA^{N_1+1}B \\ \vdots \\ CA^{N_2}B \end{bmatrix} x(k|k) \quad (4.44)$$

$$G_{SS,y,N_{123}} = \begin{bmatrix} CA^{N_1-1}B & CA^{N_1-2}B & \dots & CA^{N_1-N_3}B \\ CA^{N_1}B & CA^{N_1-1}B & \dots & CA^{N_1-N_3}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{N_2-1}B & CA^{N_2-2}B & \dots & CA^{N_2-N_3}B \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

Bien que l'équation de prédiction soit facile à obtenir, l'utilisation du modèle variables d'état comporte certains inconvénients. En effet, celui-ci ne considère pas explicitement les perturbations, comme le fait la prédiction obtenue à partir du modèle CARIMA. Pour obtenir une prédiction fiable, il faut donc utiliser le modèle augmenté présenté à la Section 4.1.2 ou utiliser un observateur d'états.

4.3. Optimisation et loi de commande

L'algorithme d'optimisation d'un compensateur prédictif permet d'obtenir la séquence de commande future qui minimise la valeur d'une fonction coût décrivant mathématiquement la performance du système. Dans la littérature, plusieurs types de fonction coût sont présentés. Leur forme dépend surtout du modèle utilisé, mais aussi des paramètres du système que le concepteur du compensateur souhaite optimiser.

Les compensateurs prédictifs utilisant le modèle fonctions de transfert ou modèle variables d'état utilisent souvent, comme le mentionne les volumes de (Camacho et Bordons 2003; Rossiter 2003), la fonction coût suivante :

$$J(u_{N_3}) = \frac{1}{2} (y_{N_{12}} - r_{N_{12}})^T Q_{MPC} (y_{N_{12}} - r_{N_{12}}) + \frac{1}{2} u_{N_3}^T R_{MPC} u_{N_3} \quad (4.46)$$

où $y_{N_{12}} - r_{N_{12}}$ correspond à l'erreur entre la prédiction et la trajectoire de référence (erreur future) et Q_{MPC} , R_{MPC} sont des matrices de pondération. Il est à noter que cette équation utilise la séquence de commande u_{N_3} . En fait, cette fonction coût fait intervenir l'équation de prédiction basée sur le modèle variables d'état nominal. En effet, lorsque le modèle fonctions de transfert ou variables d'état augmenté est utilisé, la fonction s'exprime selon Δu_{N_3} . Cependant, pour simplifier la notation, la démonstration qui suit utilise seulement la séquence de commandes u_{N_3} sans perte de généralité. En substituant l'équation (4.30) dans l'équation précédente, l'équation (4.47) est obtenue.

$$J(u_{N_3}) = \frac{1}{2} (G_{N_{123}} u_{N_3} + f_{N_{12}} - r_{N_{12}})^T Q_{MPC} (G_{N_{123}} u_{N_3} + f_{N_{12}} - r_{N_{12}}) + \frac{1}{2} u_{N_3}^T R_{MPC} u_{N_3} \quad (4.47)$$

Après quelques manipulations mathématiques simples, la fonction coût de l'équation précédente devient :

$$J(u_{N_3}) = \frac{1}{2} u_{N_3}^T \underbrace{(G_{N_{123}}^T Q_{MPC} G_{N_{123}} + R_{MPC})}_W u_{N_3} + u_{N_3}^T \underbrace{G_{N_{123}}^T Q_{MPC} (f_{N_{12}} - r_{N_{12}})}_w + \frac{1}{2} (f_{N_{12}} - r_{N_{12}})^T Q_{MPC} (f_{N_{12}} - r_{N_{12}}) \quad (4.48)$$

Cette représentation sera utile dans les sections suivantes. En considérant que la fonction coût (4.47) n'est soumise à aucune contrainte, le signal de commande qui minimise cette dernière peut être

calculée en prenant le gradient de $J(\mathbf{u}_{N_3})$ par rapport \mathbf{u}_{N_3} et en l'égalant à zéro. Mathématiquement, ceci mène à l'équation suivante :

$$\frac{dJ(\mathbf{u}_{N_3})}{d\mathbf{u}_{N_3}} = (\mathbf{G}_{N_{123}}^T \mathbf{Q}_{MPC} \mathbf{G}_{N_{123}} + \mathbf{R}_{MPC}) \mathbf{u}_{N_3} + \mathbf{G}_{N_{123}}^T \mathbf{Q}_{MPC} (\mathbf{f}_{N_{12}} - \mathbf{r}_{N_{12}}) = 0 \quad (4.49)$$

Il suffit alors de mettre en évidence le vecteur \mathbf{u}_{N_3} :

$$\mathbf{u}_{N_3}^* = (\mathbf{G}_{N_{123}}^T \mathbf{Q}_{MPC} \mathbf{G}_{N_{123}} + \mathbf{R}_{MPC})^{-1} \mathbf{G}_{N_{123}}^T \mathbf{Q}_{MPC} (\mathbf{r}_{N_{12}} - \mathbf{f}_{N_{12}}) \quad (4.50)$$

Seulement les m premières composantes du vecteur \mathbf{u} sont utilisées pour commander les actionneurs du système dynamique. Par conséquent, il est utile de définir la matrice \mathbf{K} désignant toutes les colonnes des m premières lignes de la matrice $(\mathbf{G}_{N_{123}}^T \mathbf{Q} \mathbf{G}_{N_{123}} + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{G}_{N_{123}}^T \mathbf{Q}$, pour définir la loi de commande du compensateur :

$$\mathbf{u}(k|k) = \mathbf{K}(\mathbf{r}_{N_{12}} - \mathbf{f}_{N_{12}}) \quad (4.51)$$

4.4. Stabilité

La plupart des lois de commande prédictives ne garantissent pas la stabilité du système en boucle fermée. Par conséquent, le concepteur doit vérifier ce critère une fois la loi de commande établie. La présente section explique donc comment démontrer mathématiquement la stabilité d'un compensateur prédictif.

4.4.1. Modèle fonctions de transfert

Lorsque le compensateur utilise un modèle fonctions de transfert, la démonstration de la stabilité est très complexe. En fait, la démarche pour obtenir l'équation caractéristique du système en boucle fermée est laborieuse. Le paragraphe qui suit s'inspire de la démarche expliquée dans le volume de (Camacho et Bordons 2003). En fait, celle-ci a été généralisée pour les systèmes n'ayant pas le même nombre d'entrées que de sorties. En utilisant la définition de \mathbf{f}_l à l'équation (4.26), la loi de commande de l'équation (4.51) peut être écrite pour considérer seulement l'entrée j et la sortie i :

$$\Delta u_j(k|k) = \sum_{l=N_1}^{N_2} k_{l,ji} z^{-N_2+l} r_l(k + N_2|k) - \sum_{l=N_1}^{N_2} k_{l,ji} G'_{l,ij}(z^{-1}) \Delta u_j(k-1|k) - \sum_{l=N_1}^{N_2} k_{l,ji} E_{l,ii}(z^{-1}) y_i(k|k) \quad (4.52)$$

où $k_{l,ji}$ correspond à la ligne j et à la colonne i de la matrice \mathbf{k}_l de m lignes et n colonnes qui composent la matrice \mathbf{K} , $G'_{l,ij}(z^{-1})$ est le polynôme contenu dans la matrice polynomiale $\mathbf{G}'_l(z^{-1})$ correspondant à la sortie i et à l'entrée j et $E_{l,ii}(z^{-1})$ est le polynôme de la matrice polynomiale $\mathbf{E}_l(z^{-1})$ relié à la sortie i . Ensuite, en multipliant le modèle CARIMA montré à l'équation (4.1) par Δ , il est possible d'obtenir le résultat de l'équation (4.53).

$$\tilde{A}_{ii}(z^{-1}) y_i(k|k) = B_{ij}(z^{-1}) \Delta u_j(k-1|k) + C_{ii}(z^{-1}) n_i(k|k) \quad (4.53)$$

En mettant en évidence z^{-1} de $\Delta u_j(k-1|k)$, il est facile d'obtenir l'équation suivante :

4.5. Contraintes

La fonction coût de l'algorithme d'optimisation d'un compensateur prédictif peut être soumise à plusieurs types de contraintes. Cependant, avec ces contraintes, la solution optimale du problème n'est plus analytique. En fait, il existe plusieurs algorithmes numériques pour calculer la solution optimale en présence de contraintes. Avant de décrire les types de contraintes et les algorithmes d'optimisation les plus souvent utilisés, il est utile de comprendre la géométrie de la fonction coût (4.47).

En fait, dans l'espace vectoriel \mathbf{u}_{N_3} , la fonction coût forme une hyper-ellipsoïde centrée sur la solution optimale $\mathbf{u}_{N_3}^*$. Par exemple, la Figure 4.3 présente les coûts C_0, C_1, C_2 et C_3 d'une fonction quelconque d'un système à une entrée et une sortie avec $N_2 = 1, N_2 = N_3 = 2$.

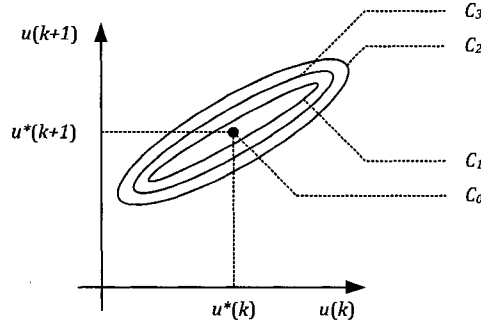


Figure 4.3: Fonction coût représentée dans l'espace de la séquence des commandes

Cette caractéristique géométrique d'une fonction coût quadratique, exploitée pour développer des algorithmes d'optimisation, peut être vérifiée en posant l'équation (4.60) qui représente l'équation vectorielle d'une hyper-ellipsoïde :

$$(\mathbf{u}_{N_3} - \mathbf{u}_c)^T \mathbf{W} (\mathbf{u}_{N_3} - \mathbf{u}_c) = c^2 \quad (4.60)$$

où \mathbf{u}_c correspond au centre de cette dernière et c est un paramètre détermine la dimension de l'ellipse. Il est possible de former l'équation (4.61) à partir de l'équation précédente.

$$\mathbf{u}_{N_3}^T \mathbf{W} \mathbf{u}_{N_3} + 2\mathbf{u}_{N_3}^T \mathbf{W} \mathbf{u}_c + \mathbf{u}_c^T \mathbf{W} \mathbf{u}_c - c^2 = 0 \quad (4.61)$$

En comparant chacun des termes de l'équation précédente avec l'équation (4.48), il est possible de démontrer que la fonction coût utilisée en commande prédictive est un hyper-ellipsoïde. En effet, le terme de degré deux de ces équations permet de cerner la valeur de la matrice \mathbf{W} :

$$\mathbf{u}_{N_3}^T \mathbf{W} \mathbf{u}_{N_3} = \mathbf{u}_{N_3}^T (\mathbf{G}_{N_{123}}^T \mathbf{Q}_{MPC} \mathbf{G}_{N_{123}} + \mathbf{R}_{MPC}) \mathbf{u}_{N_3} \Leftrightarrow \mathbf{W} = \mathbf{G}_{N_{123}}^T \mathbf{Q}_{MPC} \mathbf{G}_{N_{123}} + \mathbf{R}_{MPC} \quad (4.62)$$

En incluant le résultat précédent ainsi que la valeur de \mathbf{u}_c , considérée comme étant équivalente à la solution optimale de la fonction coût (4.50), dans le terme de degré un de l'équation (4.61), il est possible d'obtenir :

$$2\mathbf{u}_{N_3}^T \mathbf{W} \mathbf{u}_c = 2\mathbf{u}_{N_3}^T (\mathbf{G}_{N_{123}}^T \mathbf{Q}_{MPC} \mathbf{G}_{N_{123}} + \mathbf{R}_{MPC}) (\mathbf{G}_{N_{123}}^T \mathbf{Q}_{MPC} \mathbf{G}_{N_{123}} + \mathbf{R}_{MPC})^{-1} \mathbf{G}_{N_{123}}^T (\mathbf{r}_{N_{12}} - \mathbf{f}_{N_{12}}) \\ = 2\mathbf{u}_{N_3}^T \mathbf{G}_{N_{123}}^T (\mathbf{f}_{N_{12}} - \mathbf{r}_{N_{12}}) \quad (4.63)$$

Ce résultat est identique au terme d'ordre un de la fonction coût de l'équation (4.48). Finalement, le terme d'ordre zéro des deux équations correspondent, car J et c peuvent être quelconque :

$$(\mathbf{f}_{N_{12}} - \mathbf{r}_{N_{12}})^T \mathbf{Q}_{MPC} (\mathbf{f}_{N_{12}} - \mathbf{r}_{N_{12}}) - J = c^2 \quad (4.64)$$

4.5.1. Types de contraintes

Il existe plusieurs types de contraintes, mais comme le mentionne les volumes de (Camacho et Bordons 2003; Rossiter 2003), celles-ci peuvent être séparées en deux catégories, c'est-à-dire les contraintes qui s'appliquent directement sur la commande \mathbf{u} du système et les contraintes concernant les sorties \mathbf{y} de ce dernier.

Contraintes sur les entrées

Les contraintes sur les entrées du système peuvent imposer une variation maximale de la commande. Lorsque la séquence de commandes à optimiser est $\Delta \mathbf{u}_{N_3}$, comme c'est le cas avec les compensateurs prédictifs fonctions de transfert ou modèle variables d'état augmenté, ces contraintes prennent la forme suivante :

$$\underline{\mathbf{u}} \leq \Delta \mathbf{u}_{N_3} \leq \bar{\mathbf{u}} \quad (4.65)$$

où $\underline{\mathbf{u}}$ et $\bar{\mathbf{u}}$ sont respectivement la borne minimale et maximal des variations. En organisant ce résultat sous forme matricielle, il est possible d'obtenir :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{mN_3 \times mN_3} \\ -\mathbf{I}_{mN_3 \times mN_3} \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_{N_3} \leq \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ -\underline{\mathbf{u}} \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

Par contre, si la séquence de commandes utilisée dans l'équation de prédiction est \mathbf{u}_{N_3} , l'expression mathématique qui représente ces contraintes devient plus complexe :

$$\underline{\mathbf{u}} \leq \mathbf{V} \mathbf{u}_{N_3} - \mathbf{v} \mathbf{u}(k-1|k-1) \leq \bar{\mathbf{u}} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ -\mathbf{V} \end{bmatrix} \mathbf{u}_{N_3} \leq \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{v} \mathbf{u}(k-1|k-1) \\ \underline{\mathbf{u}} - \mathbf{v} \mathbf{u}(k-1|k-1) \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

où \mathbf{V} et \mathbf{v} sont définis par :

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{m \times m} & 0 & 0 & 0 \\ -\mathbf{I}_{m \times m} & \mathbf{I}_{m \times m} & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I}_{m \times m} & \mathbf{I}_{m \times m} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0}_{mN_3-1 \times 1} \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

Certaines contraintes peuvent aussi limiter l'amplitude de la commande. De la même façon, lorsque la séquence de commandes $\Delta \mathbf{u}_{N_3}$, ces dernières prennent la forme suivante :

$$\underline{\mathbf{U}} \leq \mathbf{T} \Delta \mathbf{u}_{N_3} + \mathbf{t} \mathbf{u}(k-1|k-1) \leq \bar{\mathbf{U}} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ -\mathbf{T} \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_{N_3} \leq \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{U}} - \mathbf{t} \mathbf{u}(k-1|k-1) \\ -\underline{\mathbf{U}} + \mathbf{t} \mathbf{u}(k-1|k-1) \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

où $\underline{\mathbf{U}}$ et $\bar{\mathbf{U}}$ sont respectivement l'amplitude minimale et maximale considérée tandis que \mathbf{T} et \mathbf{t} correspondent à :

$$T = \begin{bmatrix} I_{m \times m} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ I_{m \times m} & I_{m \times m} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

$$t = \mathbf{1}_{mN_3 \times 1} \quad (4.72)$$

Ces mêmes contraintes s'expriment plus facilement lorsque l'équation de prédiction dépend de \mathbf{u}_{N_3} :

$$\underline{U} \leq \mathbf{u}_{N_3} \leq \bar{U} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} I_{mN_3 \times mN_3} \\ -I_{mN_3 \times mN_3} \end{bmatrix} \mathbf{u}_{N_3} \leq \begin{bmatrix} \underline{U} \\ -\bar{U} \end{bmatrix} \quad (4.73)$$

Contraintes sur les sorties

Il existe plusieurs façons de représenter les contraintes en sortie. Cependant, la plus utilisée est donnée par l'équation suivante :

$$\underline{y} \leq G_{N_{123}} \Delta \mathbf{u}_{N_3} + f_{N_{12}} \leq \bar{y} \quad (4.74)$$

où \underline{y} et \bar{y} représentent respectivement la borne inférieure et supérieure des sorties du système en boucle fermée. Sous forme matricielle, ces contraintes prennent la forme qui suit :

$$\begin{bmatrix} G_{N_{123}} \\ -G_{N_{123}} \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_{N_3} \leq \begin{bmatrix} \bar{y} - f_{N_{12}} \\ -\underline{y} + f_{N_{12}} \end{bmatrix} \quad (4.75)$$

Il est à noter qu'en utilisant la séquence de commandes \mathbf{u}_{N_3} , ces contraintes prennent la même forme.

4.5.2. Algorithme d'optimisation

La procédure pour optimiser la fonction coût (4.48) lorsque celle-ci est soumise à des contraintes est complexe. En effet, il faut faire intervenir des algorithmes numériques. Les algorithmes les plus utilisés sont : la méthode du simplexe, la méthode de l'ensemble actif, la méthode du point intérieur et la programmation multiparamétrique. Ceux-ci sont présentés en détail à l'Annexe D. Cependant, toutes ces techniques demandent beaucoup de puissance de calcul et la convergence vers la solution optimale n'est pas assurée. Cette réalité fait qu'il est difficile des les utiliser pour mettre en œuvre une loi de commande pour un système autonome.

4.6. Résumé

Ce chapitre a présenté les fondements des lois de commande prédictives discrètes linéaires basées sur le modèle fonctions de transfert et le modèle variables d'état. Plusieurs algorithmes pour traiter les contraintes ont aussi été exposés. Cependant, pour pouvoir utiliser ces lois de commande sur une formation de satellites, il est nécessaire de faire une brève incursion dans le domaine des lois de commande prédictives non linéaires discrètes. En effet, celles-ci pourraient être facilement adaptées pour utiliser les modèles dynamiques relatifs souvent linéaires à paramètres variant.

CHAPITRE 5

Commande prédictive non linéaire discrète

Certains systèmes modélisés par des équations non linéaires ne peuvent être asservis en utilisant les techniques prédictives présentées au chapitre précédent. En effet, il s'avère que dans certaines situations, le système s'éloigne trop de son point d'opération (point de linéarisation) et le modèle embarqué dans l'algorithme de contrôle n'est plus valide. Le système asservi est donc moins performant et peut même devenir instable. Le candidat propose une solution, inspirée des travaux de (Tyagunov 2004), pour adapter la loi de commande prédictive du Chapitre 4 aux modèles non linéaires. Celui-ci est divisé en trois sections à savoir les modèles non linéaires, l'équation de prédiction et l'algorithme d'optimisation utilisés par cette loi de commande prédictive.

5.1. Modèle

Un procédé non linéaire peut être décrit par :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{h}^c(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \quad (5.1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{p}^c(\mathbf{x}(t)) \quad (5.2)$$

où $\mathbf{x}(t)$ est le vecteur d'états, $\mathbf{u}(t)$ est le vecteur d'entrées et $\mathbf{y}(t)$ le vecteur de sorties. Pour la conception d'un contrôleur prédictif, le signal de commande est considéré constant entre deux échantillons. La version discrète du modèle s'exprime donc par :

$$\mathbf{x}(k+1|k) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(k|k), \mathbf{u}(k|k)) \quad (5.3)$$

$$\mathbf{y}(k|k) = \mathbf{p}(\mathbf{x}(k|k)) \quad (5.4)$$

où $\mathbf{h}(\mathbf{x}(k|k), \mathbf{u}(k|k))$ correspond aux états terminaux obtenus en intégrant l'équation (5.1) sur une période d'échantillonnage t_s avec les conditions initiales $\mathbf{x}(k|k)$ et les entrées constantes $\mathbf{u}(k|k)$.

5.2. Prédiction

Pour implémenter une loi de commande prédictive, il est nécessaire, comme expliqué dans le Chapitre 4, de prédire les états du système sur un horizon N . Évidemment, étant donné que le système considéré est non linéaire, les états futurs sont reliés aux états présents et aux entrées présentes et futures d'une manière non linéaire. Trouver une séquence d'entrées optimales devient donc un problème d'optimisation non linéaire complexe et difficile à résoudre. Par conséquent,

plusieurs auteurs, (Lee et Ricker 1994; De Nicolao, Magni et al. 1998; Allgöwer et Zheng 2000; Tyagunov 2004), proposent de simplifier cette approche en effectuant une linéarisation locale autour de la trajectoire de référence pour obtenir une prédiction linéairement dépendante des entrées présentes et futures. De cette manière, le modèle non linéaire est approximé par un modèle linéaire à paramètres variant. Ainsi, la loi de commande est obtenue en résolvant une fonction coût quadratique à chaque échantillon.

La démarche pour obtenir l'équation de prédiction est relativement complexe. Pour ce faire, il faut considérer que les états $x(k|k)$ du modèle au temps N peuvent être obtenus récursivement :

$$x(k+N|k) = h_N(x(k|k), \{u(k+i|k)\}_{i=0}^{N-1}) = h(\dots(H(x(k|k), u(k|k)), \dots), u(k+N-1|k)) \quad (5.5)$$

Pour obtenir une loi de commande prédictive analytique (sans contrainte), il faut linéariser cette équation par rapport à la séquence de commande, c'est-à-dire $\{u(k+i|k)\}_{i=0}^{N-1}$. Pour y arriver, il faut le faire pour le temps $l = 1$, $l = 2$ et généraliser la démarche pour $l = N - 1$.

En lien avec ce qui précède, $x(k+1|k)$ peut être obtenu en linéarisant l'équation (5.3) par rapport à $u(k|k)$ autour de $u_{nom}(k|k)$:

$$x(k+1|k) \approx h(x(k|k), u_{nom}(k|k)) + B_k u(k|k) - u_{nom}(k|k) \quad (5.6)$$

où B_k correspond à une discrétisation avec bloqueur d'ordre zéro du Jacobien :

$$B_k^c = \left. \frac{\partial h^c}{\partial u} \right|_{\substack{x(t)=x(k|k) \\ u(t)=u_{nom}(k|k)}} \quad (5.7)$$

À noter que les critères utilisés pour choisir $u_{nom}(k|k)$ seront exposés plus loin. $x(k+2)$ est défini, par définition, en fonction de $x(k+1|k)$ et $u(k+1|k)$:

$$x(k+2|k) = h(x(k+1|k), u(k+1|k)) \quad (5.8)$$

Cette équation peut être linéarisée par rapport à $x(k+1|k)$ et $u(k+1|k)$ autour de $x_{nom}(k+1|k) = h(x(k|k), u_{nom}(k|k))$ et $u_{nom}(k+1|k)$ pour obtenir :

$$x(k+2|k) \approx h_2(x(k|k), \{u_{nom}(k+i|k)\}_{i=0}^1) + A_{k+1} (x(k+1|k) - h(x(k|k), u_{nom}(k|k))) + B_{k+1} (u(k+1|k) - u_{nom}(k+1|k)) \quad (5.9)$$

où A_{k+1} et B_{k+1} correspondent respectivement à une discrétisation avec bloqueur d'ordre zéro des Jacobien suivants :

$$A_{k+1}^c = \left. \frac{\partial h^c}{\partial x} \right|_{\substack{x(t)=x(k+1|k) \\ u(t)=u_{nom}(k|k)}} \quad (5.10)$$

$$B_{k+1}^c = \left. \frac{\partial h^c}{\partial u} \right|_{\substack{x(t)=x(k+1|k) \\ u(t)=u_{nom}(k+1|k)}} \quad (5.11)$$

En remplaçant l'équation (5.6) dans l'équation (5.9), il est possible d'obtenir l'expression linéaire de $x(k+2|k)$ en fonction de la séquence de commande et des états présents du système :

$$x(k+2|k) \approx h_2(x(k|k), \{u_{nom}(k+i)\}_{i=0}^1) + [A_{k+1} B_k \quad B_{k+1}] \begin{bmatrix} u(k|k) - u_{nom}(k|k) \\ u(k+1|k) - u_{nom}(k+1|k) \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Il est possible de généraliser le résultat des équations (5.6) et (5.12) pour prédire les états du système au temps $k+l$:

$$x(k+l|k) \approx h_l(x(k|k), \{u_{nom}(k+i|k)\}_{i=0}^{l-1}) + \left[\prod_{i=0}^{l-1} A_{k+l-i-1} B_k \quad \prod_{i=0}^{l-2} A_{k+l-i-1} B_{k+1} \quad \dots \quad B_{k+l-1} \right] \times \begin{bmatrix} u(k|k) - u_{nom}(k|k) \\ u(k+1|k) - u_{nom}(k+1|k) \\ \dots \\ u(k+l-1|k) - u_{nom}(k+l-1|k) \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

où A_{k+l} et B_{k+l} correspondent à une discrétisation bloqueur d'ordre zéro des Jacobien suivants :

$$A_{k+l}^c = \frac{\partial h^c}{\partial x} \bigg|_{\substack{x(t)=x(k+l|k) \\ u(t)=u_{nom}(k+l|k)}} \quad (5.14)$$

$$B_{k+l}^c = \frac{\partial h^c}{\partial u} \bigg|_{\substack{x(t)=x(k+l|k) \\ u(t)=u_{nom}(k+l|k)}} \quad (5.15)$$

Dans le but d'obtenir la prédiction des sorties, l'équation de sortie du modèle :

$$y(k+1|k) = p(x(k+1|k)) \quad (5.16)$$

doit être linéarisée par rapport à $x(k+1|k)$ autour de $x_{nom}(k+1|k)$:

$$y(k+1|k) \approx p(h(x(k|k), u_{nom}(k|k))) + C_{k+1} (x(k+1|k) - h(x(k|k), u_{nom}(k|k))) \quad (5.17)$$

où C_k correspond à la discrétisation du Jacobien défini par :

$$C_{k+1|k}^c = \frac{\partial p^c}{\partial x} \bigg|_{x(t)=x(k+1|k)} \quad (5.18)$$

En généralisant, pour obtenir les sorties du modèle au temps $k+l$, l'équation (5.17) devient :

$$y(k+l|k) \approx p(h_l(x(k|k), \{u_{nom}(k+i|k)\}_{i=0}^{l-1})) + C_{k+l} (x(k+l|k) - h_l(x(k|k), \{u_{nom}(k+i|k)\}_{i=0}^{l-1})) \quad (5.19)$$

Les équations de prédiction des états (5.13) et des sorties (5.19) peuvent être combinées pour obtenir l'équation de prédiction d'un modèle non linéaire sur un horizon N :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \bar{y}(k+1|k) \\ \bar{y}(k+2|k) \\ \vdots \\ \bar{y}(k+N|k) \end{bmatrix}}_{\bar{y}_N} \approx \underbrace{\begin{bmatrix} p(h(x(k|k), u_{nom}(k|k))) \\ p(h_2(x(k|k), \{u_{nom}(k+i|k)\}_{i=0}^1)) \\ \vdots \\ p(h_N(x(k|k), \{u_{nom}(k+i|k)\}_{i=0}^{N-1})) \end{bmatrix}}_{f_{y,k,N}} + \underbrace{\begin{bmatrix} C_{k+1} B_{k|k} & 0 & \dots & 0 \\ C_{k+2} A_{k+1} B_k & C_{k+2} B_{k+1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{k+N} \prod_{i=1}^N A_{k+N-i-1} B_k & C_{k+N} \prod_{i=1}^{N-1} A_{k+N-i-2} B_{k+1} & \dots & C_{k+N} B_{k+N-1} \end{bmatrix}}_{G_{n1,y,k,N} \Delta u} \times \underbrace{\begin{bmatrix} u(k|k) - u_{nom}(k|k) \\ u(k+1|k) - u_{nom}(k+1|k) \\ \dots \\ u(k+N-1|k) - u_{nom}(k+N-1|k) \end{bmatrix}}_{\Delta u} \quad (5.20)$$

où $A_{k+j} = I$ si $j < 0$. De la même façon qu'avec le prédicteur du compensateur prédictif linéaire, il est possible de définir l'équation de prédiction (5.20) pour permettre d'ajuster l'horizon de contrôle et de prédiction indépendamment :

$$\begin{aligned}
\underbrace{\begin{bmatrix} \bar{y}(k+N_1|k) \\ \bar{y}(k+N_1+1|k) \\ \vdots \\ \bar{y}(k+N_2|k) \end{bmatrix}}_{\bar{y}_{N_{12}}} &\approx \underbrace{\begin{bmatrix} p(h_{N_1}(x(k|k), \{u_{nom}(k+i|k)\}_{i=0}^{N_1-1})) \\ p(h_{N_1+1}(x(k|k), \{u_{nom}(k+i|k)\}_{i=0}^{N_1})) \\ \vdots \\ p(h_{N_2-N_1}(x(k|k), \{u_{nom}(k+i|k)\}_{i=0}^{N_2-N_1})) \end{bmatrix}}_{f_{nl,y,k,N_{12}}} + \\
&\underbrace{\begin{bmatrix} C_{k+N_1} \prod_{i=1}^{N_1} A_{k+N_1-i-1} B_k & C_{k+N_1} \prod_{i=1}^{N_1-1} A_{k+N_1-i-2} B_{k+1} & \dots & C_{k+N_1} \prod_{i=1}^{N_1-N_2+1} A_{k+N_2-N_1-i} B_{k+N_3-1} \\ C_{k+N_1+1} \prod_{i=1}^{N_1+1} A_{k+N_1-i} B_k & C_{k+N_1+1} \prod_{i=1}^{N_1-1} A_{k+N_1-i-1} B_{k+1} & \dots & C_{k+N_1+1} \prod_{i=1}^{N_1-N_2+2} A_{k+N_2-N_1-i+1} B_{k+N_3-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{k+N_2} \prod_{i=1}^{N_2} A_{k+N_2-i-1} B_k & C_{k+N_2} \prod_{i=1}^{N_2-1} A_{k+N_2-i-2} B_{k+1} & \dots & C_{k+N_2} \prod_{i=1}^{N_2-N_3+1} A_{k+N_2-N_3-i} B_{k+N_3-1} \end{bmatrix}}_{G_{nl,y,k,N_{123}}} \\
&\times \underbrace{\begin{bmatrix} u(k|k) - u_{nom}(k|k) \\ u(k+1|k) - u_{nom}(k+1|k) \\ \vdots \\ u(k+N_3-1|k) - u_{nom}(k+N_3-1|k) \end{bmatrix}}_{\Delta u_{N_3}} \quad (5.21)
\end{aligned}$$

où l'intervalle $[N_1 \ N_2]$ désigne l'horizon de prédiction et N_3 l'horizon de contrôle.

5.3. Optimisation et loi de commande

La structure de l'équation de prédiction permet l'utilisation de la théorie d'optimisation présentée au Chapitre 4. Cependant, certains aspects sont à considérer. Premièrement, la linéarisation locale, effectuée à chaque cycle, est valide seulement si cette trajectoire nominale est près de la trajectoire optimale. Par conséquent, un choix simple et efficace est de poser $u_{nom}(k+l|k) = u^*(k+l|k-1)$. Deuxièmement, la matrice colonne $f_{nl,y,k,N_{12}}$ peut être obtenue récursivement ou évaluée directement à partir de $x(k|k)$ en utilisant un algorithme d'intégration numérique. Finalement, à chaque cycle, la matrice $G_{nl,y,k,N_{123}}$ doit être recalculée pour mettre à jour les matrices Jacobiennes et l'équation (4.50) doit être appliquée pour calculer la commande optimale. L'augmentation de la charge de calcul, par rapport à un contrôleur prédictif linéaire, est raisonnable, car il permet d'éviter l'utilisation des outils d'optimisation non linéaire numérique.

5.4. Résumé

Ce chapitre a expliqué comment adapter la loi de commande linéaire discrète présentée au Chapitre 4 pour qu'elle puisse utiliser des modèles dynamiques non linéaires. En fait, il a été démontré que le modèle non linéaire embarqué doit être linéarisé à chaque itération pour obtenir un modèle linéaire local représentant bien le système à ce moment. Cette stratégie peut être facilement transposée aux modèles linéaires à paramètres variant. En effet, pour former l'équation de prédiction, le modèle pourrait être évalué selon la valeur présente de ses paramètres, soit les éléments d'orbite du satellite chef et esclave dans le cas des formations de satellites.

III. OBJECTIFS ET MÉTHODOLOGIE

CHAPITRE 6

Objectifs et méthodologie

Jusqu'à maintenant, les intérêts reliés à l'utilisation d'une formation de satellites et les spécifications de l'algorithme d'asservissement d'une telle formation ont été mis en évidence. Les techniques de modélisation et les lois de commande pour les formations ont également été traitées. Cette revue de littérature a permis d'identifier les lois de commande prédictives comme étant une solution efficace pour asservir une formation. En ce sens, une étude détaillée de ce type de compensateur a été présentée. Celle-ci a permis de faire ressortir les avantages des techniques de compensation prédictive :

- Optimalité : les compensateurs prédictifs sont basés sur l'optimisation d'une fonction coût définie par le concepteur.
- Trajectoire future considérée explicitement : les lois de commande prédictives utilisent l'erreur de poursuite de la trajectoire de référence future sur un horizon rapproché. Cette réalité la rend plus performante, car elle en réagit plus rapidement aux perturbations et/ou aux variations de la trajectoire.
- Possibilité d'inclure des contraintes sur les entrées et les sorties du système tout en maintenant l'optimalité : ces lois de commande déterminent de manière autonome la commande du système asservi qui respecte les contraintes (entrées et/ou de sorties) imposées par le concepteur. Cet aspect est particulièrement utile lorsque les actionneurs du système à asservir sont limités en puissance par exemple.
- Peu d'ajustement : cette loi de commande peut-être ajustée en utilisant des matrices de pondération qui permettent de pénaliser certains paramètres de la fonction coût.
- Mise en œuvre simple sur les modèles multivariable.
- Peut être facilement étendu au modèle linéaire à paramètres variant.

Ces avantages motivent l'utilisation de la technique de commande prédictive pour le vol en formation de satellites terrestres. En lien avec ce qui précède, ce chapitre a donc pour but d'établir les objectifs et la méthodologie de ce projet de recherche.

6.1. Objectifs

Pour être éventuellement utilisées lors d'une mission spatiale, les lois de commandes prédictives adaptées au vol en formation doivent être améliorées. En effet, les innovations proposées par le candidat sont formulées à travers les objectifs de ce projet de recherche :

- Proposer des architectures d'asservissement intégrant des lois de commande prédictives cartésiennes et par éléments d'orbite qui permettent la reconfiguration et la maintenance d'une formation de deux satellites de type chef-esclave incluant une rétroaction de l'erreur relative selon les conclusions du Chapitre 3.
- Adapter ces lois de commande aux propulseurs électriques à faible puissance (environ 30×10^{-3} Newton pour un satellite d'une masse de 250 kg) et aux orbites excentriques (les orbites considérées possèdent une excentricité moyenne (0.5) et élevée (0.7) et un axe semi-majeur de 2.42×10^7 m).
- Rendre les lois de commande prédictives plus robustes au bruit de mesure.
- Assurer l'optimalité ou la quasi-optimalité de ces lois de commande. Le concept d'optimalité en asservissement de systèmes aérospatiaux réfère aux manœuvres effectuées le plus rapidement possible tout en utilisant une quantité minimale de propergol. De plus, formuler les lois de commande de manière à ce que la solution optimale existe toujours et ce, peu importe les états du système ou la nature des perturbations. En effet, l'optimiseur des compensateurs prédictifs adaptés aux formations peut actuellement rencontrer des situations où la solution optimale n'existe pas. Cette situation ne peut être envisagée pour des formations autonomes, car les risques d'instabilité sont élevés.
- Minimiser la charge de calcul requise (en termes de temps d'utilisation du processeur embarqué sur les satellites) pour implémenter ces lois de commande, du moins par rapport aux approches précédentes. Cette considération est encore une fois pour mener vers une loi de commande prédictive autonome.
- Comparer les avantages et l'efficacité des lois de commande proposées.

6.2. Méthodologie

Pour atteindre ces objectifs, le candidat propose la méthodologie suivante :

1. Réaliser plusieurs types de compensateurs prédictifs sur un système simple pour cerner l'approche qui serait la mieux adaptée au vol en formation de satellites terrestres selon les objectifs précédemment établis.

2. Établir deux architectures d'asservissement. La première doit être basée sur une loi de commande prédictive cartésienne et la deuxième doit utiliser le même type de loi de commande, mais par éléments d'orbite. Dans ce processus, sélectionner les modèles dynamiques appropriés pour la mise en œuvre de ces lois de commande.
3. Choisir et faire le développement des lois de commande. Ceci inclut : discrétiser les modèles dynamiques choisis, développer l'équation de prédiction et établir l'algorithme de l'optimiseur.
4. Développer un simulateur non linéaire d'une formation de deux satellites sur MATLAB®.
5. Vérifier et analyser les performances des compensateurs en simulation et comparer les deux approches.

Il est à noter que les étapes 1 et 2 sont couvertes par le Chapitre 7, l'étape 3 est traitée au Chapitre 8 et les étapes 4 et 5 sont présentées au Chapitre 9.

IV. CONCEPTION DE LA LOI DE COMMANDE

CHAPITRE 7

Commande prédictive et grue à trois axes

Ce chapitre utilise la théorie présentée aux Chapitres 4 et 5 de l'état de l'art pour mettre en œuvre quelques lois de commande prédictives destinées à asservir la grue trois axes décrite et modélisée à l'Annexe E. Ce chapitre est très important, car il met en contexte la théorie et permet de vérifier les performances de différents types de compensateurs prédictifs sur un système simple. En fait, les développements présentés permettront d'établir et de justifier les fondements des compensateurs prédictifs proposés par le candidat pour un système plus complexe à savoir les formations de satellites sur des orbites excentriques. Il est à noter aussi que le travail présenté dans ce chapitre peut être considéré comme une innovation non négligeable dans le domaine de la commande prédictive. En effet, il existe peu d'étude qui compare différentes méthodes de commande prédictive appliquées sur un même système. De plus, ces lois de commandes pourrait être éventuellement implémenté sur un processeur embarqué dans le but de faire l'asservissement de la grue du laboratoire « Tele-Education in Aerospace and Mechatronics (TEAM) » du Département de génie électrique et de génie informatique de la Faculté de génie de l'Université de Sherbrooke. En fait, ce chapitre est divisé en trois parties : la première explique comment mettre en œuvre un compensateur prédictif linéaire discret fonctions de transfert, la deuxième présente un compensateur prédictif linéaire discret modèle variables d'état et enfin la troisième montre une approche de compensation prédictive non linéaire. Les deux dernières lois de commande sont utilisées sans et avec contraintes.

7.1. Compensateur prédictif linéaire fonction de transfert

L'objectif d'un algorithme d'asservissement pour ce type de grue est de transporter la charge d'un point à un autre en minimisant le temps nécessaire à la manœuvre et les oscillations de la charge. Les sorties à asservir sont donc la position de la charge x_c , y_c et z_c et les angles α et β . Pour ce faire, l'architecture d'asservissement présentée à la Figure 7.1 a été développée.

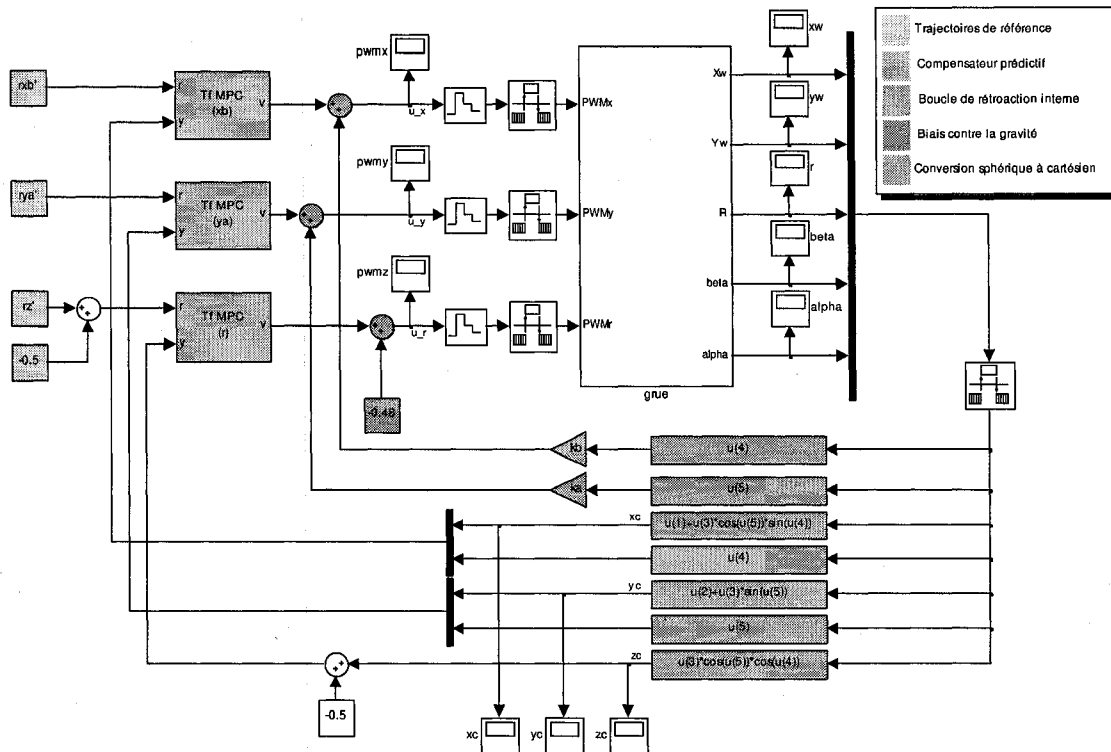


Figure 7.1: Architecture d'asservissement pour une grue trois axes avec un compensateur prédictif linéaire discret utilisant le modèle fonctions de transfert

L'élément central est le simulateur de la grue. Celui-ci a été développé à partir des équations non linéaires de la dynamique. Celui-ci fournit les valeurs des capteurs installés sur la grue, c'est-à-dire la position du chariot en x_w et y_w , la longueur du câble r , les angles β et α . Tous les autres éléments font partie du logiciel d'asservissement qui pourrait être éventuellement implémenté sur un système embarqué. En fait, cet algorithme peut être séparé en cinq sections :

- Les trajectoires de référence futures : Le rôle du compensateur prédictif est de commander le système de manière à ce que la charge suive le plus fidèlement possible ces trajectoires. En fait, celles-ci sont définies par l'opérateur. Les trajectoires nécessaires sont $r_{x_c\beta}$ pour le mouvement $x_c-\beta$, $r_{y_w\alpha}$ pour le mouvement $y_c-\alpha$ et r_{z_c} pour le mouvement z_c .
- La boucle de rétroaction interne sur les angles β et α : Ces boucles permettent d'améliorer la qualité de la prédiction qui s'effectue en considérant la présence de ce régulateur. En fait, cette technique qui stabilise le système permet de diminuer l'horizon de prédiction et de commande du compensateur prédictif tout en maintenant ses performances.
- Le compensateur prédictif linéaire basé sur les fonctions de transfert de la grue avec boucle interne fermée : Pour obtenir ces fonctions de transfert, il faut fermer la boucle interne mathématiquement. De cette manière, les entrées du modèle deviennent :

$$\begin{aligned} u_x(t) &= v_x(t) + k_\beta \beta(t) \\ u_y(t) &= v_y(t) + k_\alpha \alpha(t) \\ u_r(t) &= v_r(t) \end{aligned} \quad (7.1)$$

Sachant que $\beta(t)$ et $\alpha(t)$ correspondent respectivement à la quatrième et cinquième sortie du modèle variables d'état boucle ouverte linéarisé autour de l'équilibre, le modèle variables d'état avec boucle interne fermée peut être définie par :

$$\begin{aligned} A_{grbf}^c &= [A_{gr}^c + k_\alpha B_{gr,il}^c C_{gr,4j}^c + k_\beta B_{gr,l2}^c C_{gr,5j}^c], \quad j = i = 1 \dots S_{gr} \\ B_{grbf}^c &= B_{gr}^c \\ C_{grbf,ctl}^c &= C_{gr,ctl}^c \\ D_{grbf,ctl,k}^c &= D_{gr,ctl}^c \end{aligned} \quad (7.2)$$

Par la suite, pour discrétiser le modèle, l'auteur propose d'utiliser une approche avec bloqueur d'ordre zéro effectué avec la fonction « c2d » disponible dans MATLAB®. Étant donné que les mouvements x_c - β , y_c - α et z_c sont découplés, l'équation (7.2) peut être réécrite :

$$\begin{aligned} x_{w\beta}(k+1) &= A_{grbf,xw\beta} x_{w\beta}(k) + B_{grbf,xw\beta} v_x \\ y_{x\beta}(k+1) &= C_{grbf,xw\beta} x_{w\beta}(k+1) + D_{grbf,xw\beta} v_x \end{aligned} \quad (7.3)$$

$$\begin{aligned} x_{y\alpha}(k+1) &= A_{grbf,yw\alpha} x_{yw\alpha}(k) + B_{grbf,yw\alpha} v_y \\ y_{y\alpha}(k+1) &= C_{grbf,yw\alpha} x_{yw\alpha}(k+1) + D_{grbf,yw\alpha} v_y \end{aligned} \quad (7.4)$$

$$\begin{aligned} x_r(k+1) &= A_{grbf,r} x_r(k) + B_{bf,r} v_r \\ y_{z_c}(k+1) &= C_{grbf,r} x_r(k+1) + D_{grbf,r} v_r \end{aligned} \quad (7.5)$$

Finalement, chacun de ces modèles est mis sous forme de fonctions de transfert. Pour ce faire, la fonction « ss2tf » disponible dans MATLAB® peut être utilisée. Les résultats obtenus sont représentés par :

$$A_{grbf,x_c\beta}(z^{-1}) y_{xw\beta}(k+1) = B_{grbf,x_c\beta}(z^{-1}) v_x(k) \quad (7.6)$$

$$A_{grbf,y_c\alpha}(z^{-1}) y_{yw\alpha}(k+1) = B_{grbf,y_c\alpha}(z^{-1}) v_y(k) \quad (7.7)$$

$$A_{grbf,z_c}(z^{-1}) y_r(k+1) = B_{grbf,z_c}(z^{-1}) v_r(k) \quad (7.8)$$

Ces fonctions de transfert permettent de former les équations de prédiction présentées à l'équation (7.9) en utilisant la stratégie suggérée dans la Section 4.2.1.

$$\begin{aligned} y_{x_c\beta,N_{12}} &= G_{tf,grbf,x_c\beta,N_{123}} \Delta v_{x,N_3} + f_{tf,grbf,x_c\beta,N_{12}} \\ y_{y_c\alpha,N_{12}} &= G_{tf,grbf,y_c\alpha,N_{123}} \Delta v_{y,N_3} + f_{tf,grbf,y_c\alpha,N_{12}} \\ y_{z_c,N_{12}} &= G_{tf,grbf,z_c,N_{123}} \Delta v_{r,N_3} + f_{tf,grbf,z_c,N_{12}} \end{aligned} \quad (7.9)$$

- Le biais contre la gravité : Cette constante s'ajoute à u_r et permet de maintenir la charge autour du point de linéarisation du modèle. En fait, ce biais impose une force selon r qui s'oppose à force de gravité exercée sur la charge. Cette considération est nécessaire du fait que les compensateurs linéaires opèrent autour de ce point d'équilibre.
- La conversion des coordonnées sphériques à cartésiennes de la charge : Les données provenant des capteurs (coordonnées sphériques) doivent être converties pour obtenir la position x_c , y_c et z_c (coordonnées cartésiennes) de la charge. Cette position cartésienne est requise pour le compensateur.

L'algorithme de compensation requiert de plus amples informations. En fait, la Figure 7.2 montre la structure interne du compensateur $x_c\text{-}\beta$ (les structures des compensateurs pour les autres axes sont identiques).

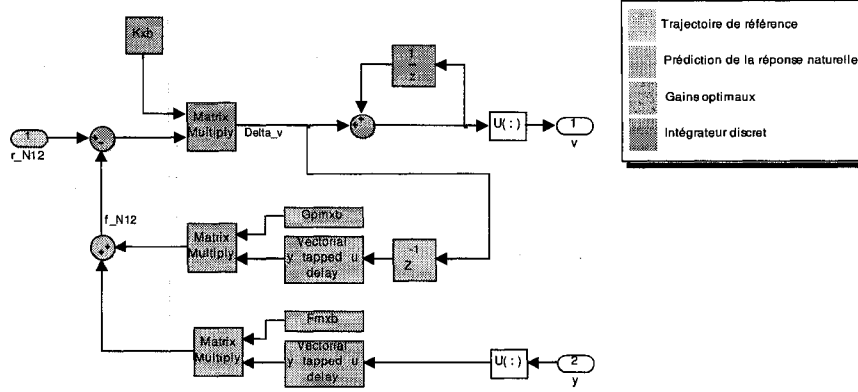


Figure 7.2: Compensateur prédictif linéaire discret utilisant le modèle fonctions de transfert

Cet algorithme est divisé en quatre parties :

- La trajectoire de référence future : Pour le compensateur $x_c\text{-}\beta$, celle-ci est définie par la matrice colonne $r_{x_c\beta, N_{12}}$.
- La prédiction de la réponse naturelle du système avec la boucle de rétroaction interne fermée : Cette prédiction, notée $f_{tf,grbf,x_c\beta, N_{12}}$, correspond à la combinaison linéaire des commandes précédentes et des sorties présentes et précédentes. Les matrices G_{pmxb} et F_{mxb} ont été calculées en utilisant l'algorithme expliqué dans la Section 4.2.1 à partir des fonctions de transfert discrètes présentées à l'équation (7.6). En fait, elles contiennent respectivement les coefficients des polynômes $G'_{grbf,x_c\beta,l}(z^{-1})$ et $F_{grbf,x_c\beta,l}(z^{-1})$, où $l = N_1 \dots N_2$.
- Les gains optimaux : Ceux-ci sont appliqués sur la différence entre la trajectoire de référence et la prédiction de la réponse naturelle de manière à obtenir la commande incrémentale Δv_x . La matrice de gain K_{xb} a été calculée comme l'explique la Section 4.3 en utilisant l'équation de prédiction (7.9). Il est à noter que pour simplifier la mise en œuvre de la loi de commande, l'auteur a fait l'hypothèse que si Δv_x optimale est appliquée sur le système avec la boucle interne fermée Δu_x sera quasi-optimal. Cette hypothèse a été vérifiée en simulation en utilisant la fonction coût suivante :

$$J(\Delta v_{N_3}) = (G_{tf,grbf,x_c\beta, N_{123}} \Delta v_{x, N_3} + f_{tf,grbf,x_c\beta, N_{123}})^T Q_{MPC} (G_{tf,grbf, N_{123}} \Delta v_{x, N_3} + f_{tf,grbf, N_{123}}) + \Delta u_{N_3}^T R_{MPC} \Delta u_{N_3} \quad (7.10)$$

où Δu_{N_3} , S_1 et S_2 sont :

$$\Delta u_{x, N_3} = \Delta v_{x, N_3} + S_1 (G_{tf,grbf,x_c\beta, N_{123}} \Delta v_{x, N_3} + f_{tf,grbf,x_c\beta, N_{123}}) + S_2 [y(k-1) \ y(k)]^T \quad (7.11)$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & k_\beta & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -k_\beta & 0 & k_\beta & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -k_\beta & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad S_2 = \begin{bmatrix} 0 & -k_\beta & 0 & k_\beta \\ 0 & 0 & 0 & -k_\beta \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (7.12)$$

La solution optimale de cette fonction coût est analytique, mais beaucoup plus complexe :

$$\begin{aligned} \Delta v_{x,N_3} = & \underbrace{P^{-1} G_{tf,grbf,x_c\beta,N_{123}}^T R_{MPC}}_{K_1} (r - f_{tf,grbf,x_c\beta,N_{123}}) \\ & - \underbrace{P^{-1} (I + S_1 G_{tf,grbf,x_c\beta,N_{123}})^T Q_{MPC} S_1 f_{tf,grbf,x_c\beta,N_{123}}}_{K_2} \\ & - \underbrace{P^{-1} (I + S_1 G_{tf,grbf,x_c\beta,N_{123}})^T Q S_2}_{K_3} [y(k-1) \quad y(k)]^T \end{aligned} \quad (7.13)$$

où P est montré à l'équation suivante :

$$P = G_{tf,grbf,x_c\beta,N_{123}}^T R_{MPC} G_{tf,grbf,x_c\beta,N_{123}} + (I + S_1 G_{tf,grbf,x_c\beta,N_{123}})^T Q_{MPC} (I + S_1 G_{tf,grbf,x_c\beta,N_{123}}) \quad (7.14)$$

- L'intégrateur discret : Celui-ci permet simplement d'obtenir l'amplitude de la commande plutôt que sa variation (calcul v_x à partir de Δv_x).

Les conditions initiales et les consignes utilisées pour mener les simulations sont respectivement présentées à au Tableau 7.1 et au Tableau 7.2.

Tableau 7.1 : Positions initiales de la charge sur grue trois axes

États	Valeurs	
$x_{c,0}$	0	m
$y_{c,0}$	0	m
$z_{c,0}$	0.5	m
β_0	0	rad
α_0	0	rad

Tableau 7.2 : Positions désirées de la charge sur grue trois axes

États	Valeurs	
x_c^d	1	m
y_c^d	1	m
z_c^d	1	m
β^d	0	rad
α^d	0	rad

Les paramètres utilisés pour le compensateur sont montrés au Tableau 7.3.

Tableau 7.3 : Paramètres du compensateur prédictif linéaire discret fonction de transfert

Paramètres	Valeurs	
N_1	1	échantillon
N_2	25	échantillons
N_3	25	échantillons
$Q_{MPC,x\beta}$	0.3I	—
$Q_{MPC,x\alpha}$	0.4I	—
$Q_{MPC,r}$	I	—
$R_{MPC,x\beta}, R_{MPC,x\alpha}, R_{MPC,r}$	I	—
k_β	8	—
k_α	10	—
$r_{x_c\beta,N_{12}}$	$[x_c^d \quad \beta^d \quad \dots]^T$	$[m \quad rad \quad \dots]$
$r_{y_c\alpha,N_{12}}$	$[y_c^d \quad \alpha^d \quad \dots]^T$	$[m \quad rad \quad \dots]$
$r_{z_c,N_{12}}$	$[z_c^d \quad \dots]^T$	$[m \quad \dots]$
t_s	0.1	sec

Les résultats obtenus, c'est-à-dire les commandes, la position de la charge dans les trois axes et l'amplitude des angles sont montrés respectivement à la Figure 7.3, à la Figure 7.4 et à la Figure 7.5.

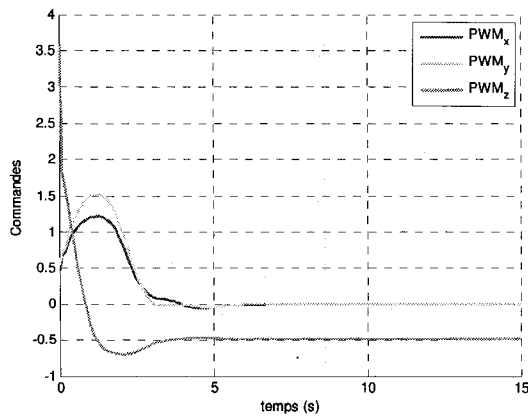


Figure 7.3 : Commandes obtenues par le MPC linéaire discret basé sur le modèle fonctions de transfert

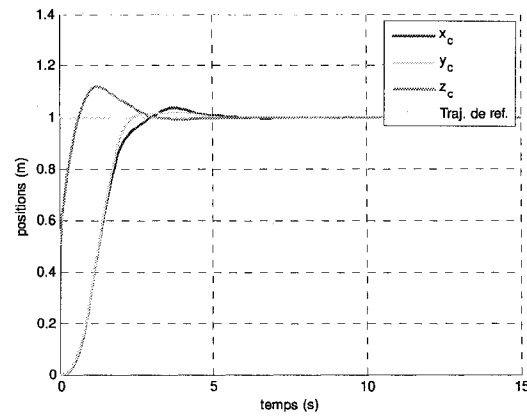


Figure 7.4: Positions de la charge obtenues par le MPC linéaire discret basé le modèle fonctions de transfert

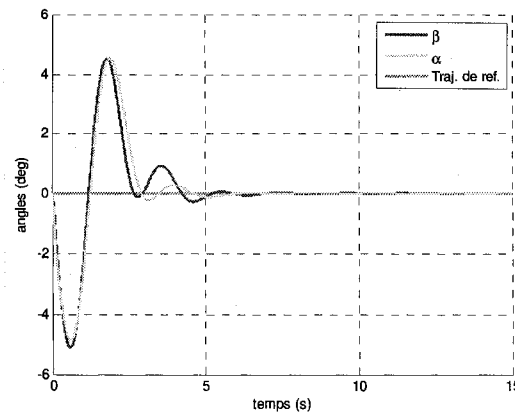


Figure 7.5: Angles obtenus par le MPC linéaire discret basé sur le modèle fonctions de transfert

Les performances obtenues sont très bonnes. En fait, il est très difficile d'obtenir un comportement semblable avec une technique d'asservissement classique. En effet, le temps de stabilisation est très rapide, c'est-à-dire 4.90 secondes pour un effort de commande de 13.9 secondes (il est à noter que la commande est sans unité, l'aire sous la courbe est donc en seconde). De plus, l'oscillation de la charge reste très faible, c'est-à-dire entre -5.10 et 4.58 degrés, malgré une consigne aussi agressive qu'un échelon unitaire. Cependant, il est possible de remarquer un léger dépassement en position, environ 11.8%, et les forces commandées aux moteurs dépassent leur maximum. Il est à noter qu'il serait sûrement possible d'ajuster les paramètres du compensateur autrement pour obtenir de meilleures performances.

7.2. Compensateur prédictif linéaire modèle variables d'état

Le compensateur prédictif basé sur le modèle variables d'état de la grue est utilisé dans une architecture très semblable à celle présentée précédemment :

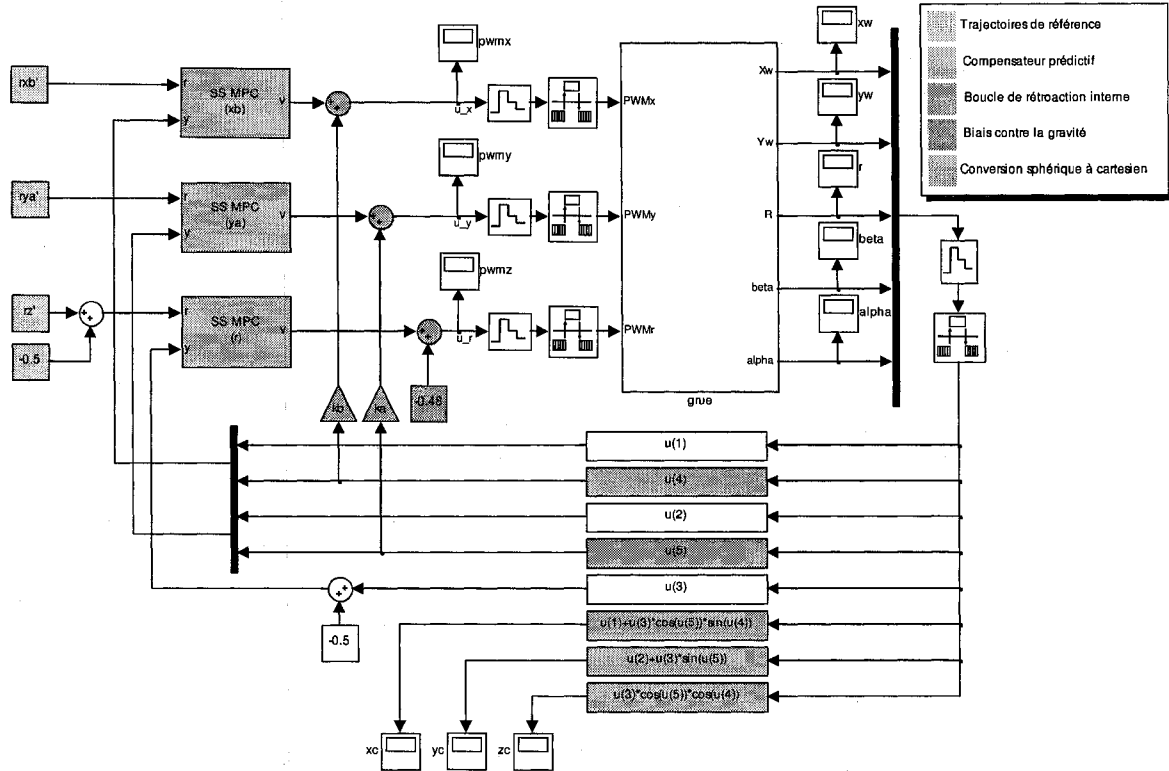


Figure 7.6: Architecture d'asservissement pour une grue trois axes avec un compensateur prédictif linéaire discret utilisant le modèle variables d'état

Seulement les différences sont commentées :

- Le compensateur est encore une fois découplé selon les trois axes. Cependant, il est basé directement sur les modèles variables d'état linéaires discretisés avec boucle interne fermée. Ces modèles découplés ont été présentés aux équations (7.3), (7.4) et (7.5). Les équations de prédiction utilisées par le compensateur sont :

$$\begin{aligned} y_{x_c\beta} &= G_{ss,grbf,x_w\beta,N_{123}} v_{x,N_3} + f_{ss,grbf,x_w\beta,N_{12}} \\ y_{y_c\alpha} &= G_{ss,grbf,y_w\alpha,N_{123}} v_{y,N_3} + f_{ss,grbf,y_w\alpha,N_{12}} \\ y_{z_c} &= G_{ss,grbf,z_r,N_{123}} v_{z,N_3} + f_{ss,grbf,z_r,N_{12}} \end{aligned} \quad (7.15)$$

Les paramètres de ces équations sont définis à la Section 4.2.2.

- Les rétroactions externes s'effectuent directement sur les sorties de la grue, c'est-à-dire sur x_w, y_w, r, β et α .

L'algorithme du compensateur est détaillé plus précisément à la Figure 7.7.

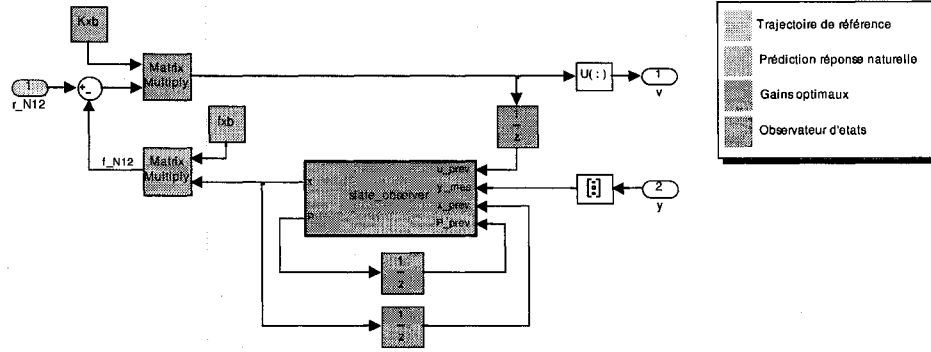


Figure 7.7: Compensateur prédictif linéaire discret utilisant le modèle variables d'état

Celui-ci est constitué de quatre sections :

- La trajectoire de référence future.
- La prédiction de la réponse naturelle du système avec la boucle de rétroaction interne fermée : Cette prédiction s'effectue beaucoup plus simplement que dans la version fonction de transfert du compensateur. En fait, il suffit de multiplier la matrice f_{xb} par les états estimés de la grue. Ce résultat correspond à $f_{ss,grbf,xw\beta,N_{12}}$ présenté précédemment à l'équation (7.15).
- Les gains optimaux : Ces gains sont appliqués sur la différence entre la trajectoire de référence future et la prédiction de la réponse naturelle. Cette matrice est calculée à partir de l'équation (4.51). Encore une fois, il est considéré qu'en appliquant $\Delta v_{xc\beta}^*$ sur le système le $\Delta u_{xc\beta}$ obtenu est quasi-optimal.
- L'observateur d'états : Il calcule le vecteur d'état $[x_c \ \dot{x}_c \ \beta \ \dot{\beta}]$ à partir des sorties mesurées, c'est-à-dire $[x_w \ \beta]$. Ce vecteur est nécessaire au calcul de la prédiction de la réponse naturelle du modèle. Il est implémenté par un filtre de Kalman linéaire discret dont l'algorithme peut être séparé en deux phases : la phase de propagation et la phase de mise à jour. La phase de propagation consiste à faire la prédiction des états du système et de la variance du bruit en utilisant les états et la variance précédemment estimés :

$$\begin{aligned} x_{c\beta}(k+1|k) &= A_{grbf,xc\beta} \hat{x}_{c\beta}(k|k-1) + B_{grbf,xc\beta} u(k|k) \\ P(k+1|k) &= A_{grbf,xc\beta} P(k|k-1) A_{grbf,xc\beta}^T + Q_{KF} \end{aligned} \quad (7.16)$$

où Q_{KF} est la matrice de pondération de la covariance du bruit représentant les erreurs de modélisation. La phase de mise à jour consiste à calculer la version estimée des états du système à partir des prédictions et des sorties du système :

$$\begin{aligned} K &= P(k|k-1) C_{grbf,xc\beta}^T (C_{grbf,xc\beta} P(k|k-1) C_{grbf,xc\beta}^T + R_{KF})^{-1} \\ \hat{x}_{c\beta}(k|k) &= \hat{x}_{c\beta}(k|k-1) + K (y_{xw\beta}(k|k) - C_{grbf,xc\beta} \hat{x}_{c\beta}(k|k-1)) \\ \hat{P}(k|k) &= (I - K C_{grbf,xc\beta}) P(k|k-1) \end{aligned} \quad (7.17)$$

où R_{KF} est la matrice de pondération de la covariance du bruit qui représente les erreurs de mesures.

La version modèle variables d'état de l'algorithme du compensateur prédictif comporte quelques avantages par rapport à la version fonction de transfert. En effet, l'équation de prédiction est beaucoup plus facile à obtenir et l'observateur d'états, inclus implicitement dans la version fonction de transfert, peut être ajusté indépendamment de la loi de commande.

Les simulations ont été réalisées en utilisant les conditions initiales et les consignes présentées au Tableau 7.1 et au Tableau 7.2. Les paramètres du compensateur sont décrits au Tableau 7.4.

Tableau 7.4 : Paramètres du compensateur prédictif linéaire discret utilisant le modèle variables d'état

Paramètres	Valeurs	
N_1	1	échantillon
N_2	1	échantillon
N_3	25	échantillons
$Q_{MPC,x\beta}, Q_{MPC,x\alpha}$	diag([10 250 ...])	—
$Q_{MPC,r}$	I	—
$R_{MPC,x\beta}, R_{MPC,x\alpha}, R_{MPC,r}$	I	—
$Q_{KF,x\beta}, Q_{KF,y\alpha}, Q_{KF,r}$	$0.1I$	—
$R_{KF,x\beta}, R_{KF,y\alpha}, R_{KF,r}$	I	—
k_β	8	—
k_α	10	—
$r_{x_c\beta,N_{12}}$	$[x_c^* \ \beta^* \ \dots]^T$	$[m \ rad \ \dots]$
$r_{y_c\alpha,N_{12}}$	$[y_c^* \ \alpha^* \ \dots]^T$	$[m \ rad \ \dots]$
$r_{z_c,N_{12}}$	$[z_c^* \ \dots]^T$	$[m \ \dots]$
t_s	0.1	sec

Les résultats obtenus, c'est-à-dire la commande, la position de la charge et la valeur des angles sont montrés respectivement à la Figure 7.8, à la Figure 7.9 et à la Figure 7.10.

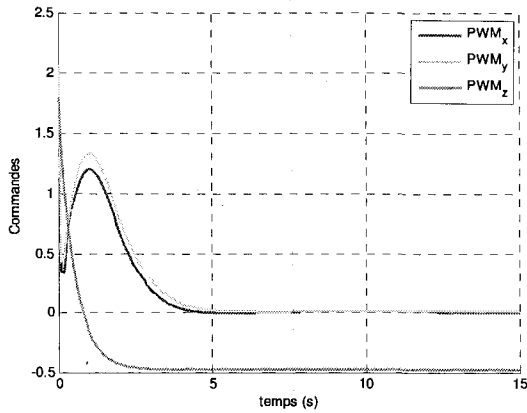


Figure 7.8 : Commandes obtenues par le MPC linéaire discret basé sur le modèle variables d'état

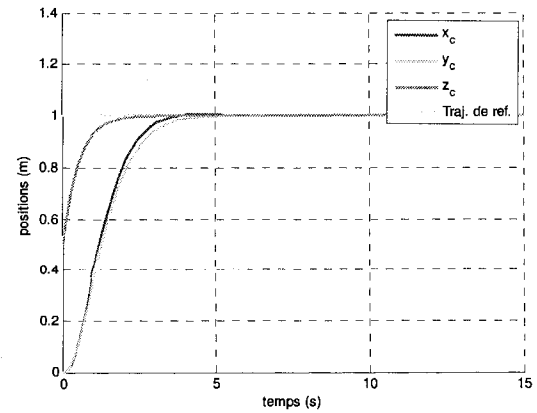


Figure 7.9: Positions de la charge obtenues par le MPC linéaire discret basé sur le modèle variables d'état

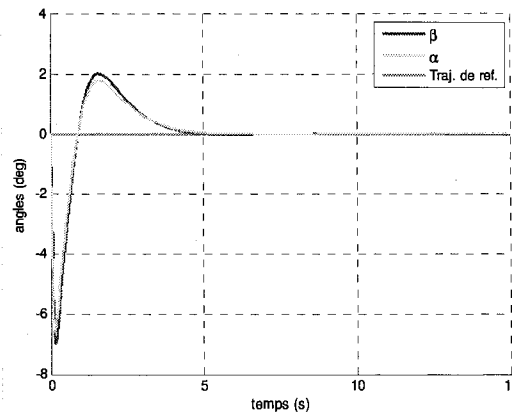


Figure 7.10 : Angles obtenus par le MPC linéaire discret baés sur le modèle variables d'état

Les performances sont semblables à celles obtenues avec le compensateur fonction de transfert. En effet, le temps de stabilisation est de 4.10 secondes pour un effort de commande de 12.7 secondes. Cependant, le dépassement maximum est plus faible, c'est-à-dire de 0.05% au détriment de l'oscillation des angles. En effet, ceux-ci oscillent entre -7.01 et 2.01 degrés. Par contre, il est probable que ce soit l'ajustement du compensateur qui engendre ces différences. En fait, les matrices de pondération de l'observateur et du compensateur prédictif pourraient être modifiées pour obtenir de meilleures performances.

Dans le Chapitre 4, il a été expliqué que la loi de commande peut être soumise à des contraintes. Celles-ci permettent de respecter les spécifications d'un client très facilement. En lien avec ce qui précède, il est maintenant considéré que cette grue est destinée à transborder des matières dangereuses dans un port. De manière à assurer la productivité et la sécurité, le client émet les spécifications suivantes :

- La charge doit osciller entre $\underline{\beta} = \underline{\alpha} = -1.5$ degré et $\overline{\beta} = \overline{\alpha} = 1.5$ degré.
- Il ne doit pas avoir de dépassement sur la position de la charge x_c , y_c et z_c .
- La commande ne doit pas dépasser l'effort maximum admissible par les actionneurs, c'est-à-dire que u_{N_3} doit se situer entre $\underline{u} = -1$ et $\overline{u} = 1$.
- Les manœuvres doivent être optimales.

Le compensateur prédictif linéaire discret soumis à ces contraintes est montré à la Figure 7.11.

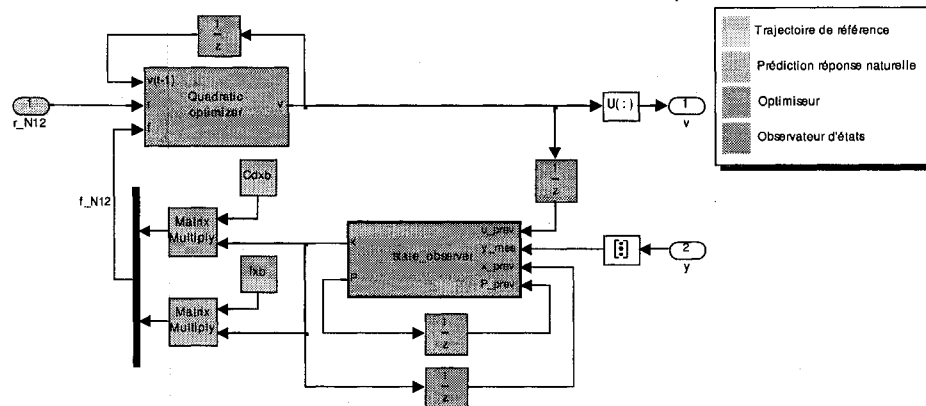


Figure 7.11: Compensateur prédictif linéaire discret utilisant le modèle variables d'état avec contraintes

La différence entre cet algorithme et le précédent se situe au niveau de l'optimiseur. En fait, il n'existe pas de solution analytique de la loi de commande lorsque la fonction coût est soumise à des contraintes. En fait, celle-ci doit être implémentée en utilisant un algorithme d'optimisation lancé à chaque échantillon. L'algorithme utilisé est celui fourni dans MATLAB® par la fonction « quadprog » dont l'algorithme est basé sur les théories présentées à la Section D. Pour bien comprendre comment utiliser ce type de compensateur, il est important d'expliquer comment formuler les contraintes énumérées précédemment sous forme matricielle à partir des informations données à la Section 4.5.1. Cependant, la présence de la boucle interne rend la formulation des contraintes plus complexe. Pour faciliter la présentation de la démarche qui suit, les équations de prédiction (7.15) ont été séparées par sorties :

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{x_c} &= \mathbf{G}_{ss,grbf,x_w,N_{123}} \mathbf{v}_{x,N_3} + \mathbf{f}_{ss,grbf,x_w,N_{12}} \\
\mathbf{y}_\beta &= \mathbf{G}_{ss,grbf,\beta,N_{123}} \mathbf{v}_{x,N_3} + \mathbf{f}_{ss,grbf,\beta,N_{12}} \\
\mathbf{y}_{y_c} &= \mathbf{G}_{ss,grbf,y_w,N_{123}} \mathbf{v}_{y,N_3} + \mathbf{f}_{ss,grbf,y_w,N_{12}} \\
\mathbf{y}_\alpha &= \mathbf{G}_{ss,grbf,\alpha,N_{123}} \mathbf{v}_{y,N_3} + \mathbf{f}_{ss,grbf,\alpha,N_{12}} \\
\mathbf{y}_{z_c} &= \mathbf{G}_{ss,grbf,r,N_{123}} \mathbf{v}_{r,N_3} + \mathbf{f}_{ss,grbf,r,N_{12}}
\end{aligned} \tag{7.18}$$

Pour respecter les contraintes sur les entrées, il faut que l'inégalité montrée à l'équation (7.19) soit satisfaite.

$$\underline{1u} \leq \begin{bmatrix} u_{x,N_3} \\ u_{y,N_3} \\ u_{r,N_3} \end{bmatrix} \leq \overline{1u} \quad (7.19)$$

Cependant, cette représentation ne peut être utilisée directement, car les compensateurs $x_w - \beta$ et $y_w - \alpha$ agissent respectivement sur les entrées v_x et v_y et non sur u_x et u_y . Sachant que la séquence future de ces entrées dépend de v_{x,N_3} , v_{y,N_3} et que les valeurs futures de β et α sont calculées en utilisant l'équation de prédiction (4.62), l'équation (7.19) peut être reformulée comme le montre l'équation suivante :

$$\underline{1u} \leq \begin{bmatrix} v_{x,N_3} + k_\beta \begin{bmatrix} 0 \\ G_{ss,grbf,\beta,N_1N_2-1N_3} \end{bmatrix} v_{x,N_3} + k_\beta \begin{bmatrix} \hat{\beta}(k) \\ f_{ss,grbf,\beta,N_1N_2-1} \end{bmatrix} \\ v_{x,N_3} + k_\alpha \begin{bmatrix} 0 \\ G_{ss,grbf,\alpha,N_1N_2-1N_3} \end{bmatrix} v_{x,N_3} + k_\alpha \begin{bmatrix} \hat{\alpha}(k) \\ f_{ss,grbf,\alpha,N_1N_2-1} \end{bmatrix} \\ v_{r,N_3} \end{bmatrix} \leq \underline{1u} \quad (7.20)$$

où $\underline{1}$ est un vecteur colonne unitaire de dimension appropriée, $\mathbf{0}$ est un vecteur ligne nul de dimension appropriée, $G_{ss,grbf,\beta,N_1N_2-1N_3}$, $f_{ss,grbf,\beta,N_1N_2-1}$, $G_{ss,grbf,\alpha,N_1N_2-1N_3}$ et $f_{ss,grbf,\alpha,N_1N_2-1}$ correspondent à la version tronquée des équations de prédiction sur un intervalle $[N_1 \ N_2 - 1]$.

Sous forme standard, ces contraintes deviennent :

$$\begin{bmatrix} I + k_\beta \begin{bmatrix} 0 \\ G_{ss,grbf,\beta,[N_1,N_2-1,N_3]} \end{bmatrix} \\ -I - k_\beta \begin{bmatrix} 0 \\ G_{ss,grbf,\beta,N_1N_2-1N_3} \end{bmatrix} \end{bmatrix} v_{x,N_3} \leq \begin{bmatrix} \underline{1u} - k_\beta \begin{bmatrix} \hat{\beta}(k) \\ f_{ss,grbf,\beta,[N_1,N_2-1]} \end{bmatrix} \\ -\underline{1u} + k_\beta \begin{bmatrix} \hat{\beta}(k) \\ f_{ss,grbf,\beta,N_1N_2-1} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} I + k_\alpha \begin{bmatrix} 0 \\ G_{ss,grbf,\alpha,N_1N_2-1N_3} \end{bmatrix} \\ -I - k_\alpha \begin{bmatrix} 0 \\ G_{ss,grbf,\alpha,N_1N_2-1N_3} \end{bmatrix} \end{bmatrix} v_{y,N_3} \leq \begin{bmatrix} \underline{1u} - k_\alpha \begin{bmatrix} \hat{\alpha}(k) \\ f_{ss,grbf,\alpha,N_1N_2-1} \end{bmatrix} \\ -\underline{1u} + k_\alpha \begin{bmatrix} \hat{\alpha}(k) \\ f_{ss,grbf,\alpha,N_1N_2-1} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (7.21) \\ \begin{bmatrix} I \\ -I \end{bmatrix} v_{r,N_3} \leq \begin{bmatrix} \underline{1u} \\ -\underline{1u} \end{bmatrix}$$

Les contraintes de sorties sont plus faciles à définir. En effet, celles-ci sont choisies de manière à ce que la position cartésienne de la charge, c'est-à-dire x_c , y_c et z_c , ne dépasse pas la trajectoire de référence (ceci assure un dépassement nul) et que la charge oscille seulement entre $\underline{\beta}$, $\underline{\alpha}$ et $\overline{\beta}$, $\overline{\alpha}$. Ces affirmations se traduisent mathématiquement par l'équation suivante :

$$\begin{bmatrix} y_{x_c} \\ y_{y_c} \\ y_{z_c} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} r_{x_c} \\ r_{y_c} \\ r_{z_c} \end{bmatrix} \quad (7.22) \\ \underline{1\beta} \leq y_\beta \leq \underline{1\overline{\beta}} \\ \underline{1\alpha} \leq y_\alpha \leq \underline{1\overline{\alpha}}$$

En utilisant les équations de prédiction, les contraintes sur les sorties pour chacun des axes, sous leur forme standard, deviennent :

$$\begin{bmatrix} G_{ss,grbf,x_w,N_{123}} \\ G_{ss,grbf,\beta,N_{123}} \\ -G_{ss,grbf,x_w,N_{123}} \\ -G_{ss,grbf,\beta,N_{123}} \end{bmatrix} v_{x,N_3} \leq \begin{bmatrix} r_{x_c} - f_{ss,grbf,x_w,N_{123}} \\ \underline{1\overline{\beta}} - f_{ss,grbf,\beta,N_{123}} \\ -r_{x_c} + f_{ss,grbf,x_w,N_{123}} \\ -\underline{1\beta} + f_{ss,grbf,\beta,N_{123}} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} G_{ss,grbf,y_w,N_{123}} \\ G_{ss,grbf,\alpha,N_{123}} \\ -G_{ss,grbf,y_w,N_{123}} \\ -G_{ss,grbf,\alpha,N_{123}} \end{bmatrix} v_{y,N_3} \leq \begin{bmatrix} r_{y_c} - f_{ss,grbf,y_w,N_{123}} \\ \underline{1\overline{\alpha}} - f_{ss,grbf,\alpha,N_{123}} \\ r_{y_c} + f_{ss,grbf,y_w,N_{123}} \\ \underline{1\alpha} + f_{ss,grbf,\alpha,N_{123}} \end{bmatrix} \quad (7.23) \\ \begin{bmatrix} G_{ss,grbf,r,N_{123}} \\ -G_{ss,grbf,r,N_{123}} \end{bmatrix} v_{r,N_3} \leq \begin{bmatrix} r_{z_c} - f_{ss,grbf,r,N_{123}} \\ r_{z_c} + f_{ss,grbf,r,N_{123}} \end{bmatrix}$$

Les contraintes sur les entrées et les sorties exprimées sous forme matricielle à l'équation (7.23) et (7.21) peuvent être concaténées pour chacun des compensateurs et utilisées directement comme argument de la fonction « quadprog ». Les résultats de simulation sont montrés à la Figure 7.12, à la Figure 7.13 et à la Figure 7.14. Il est à noter que les paramètres des compensateurs utilisés sont les mêmes que dans la simulation réalisée précédemment.

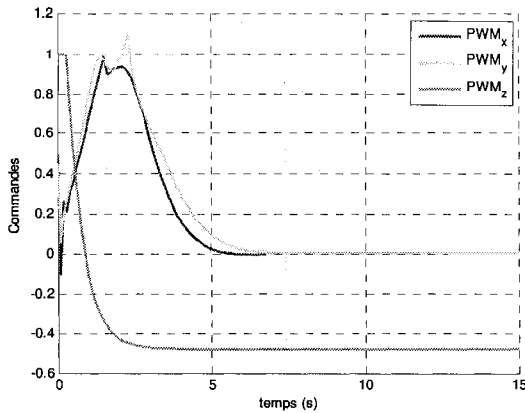


Figure 7.12 : Commandes obtenues par le MPC linéaire discret avec contraintes basé sur le modèle variables d'état

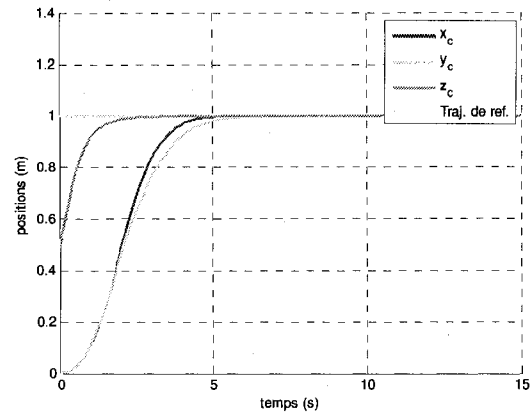


Figure 7.13: Positions de la charge obtenues par le MPC linéaire discret avec contraintes basé sur le modèle variables d'état

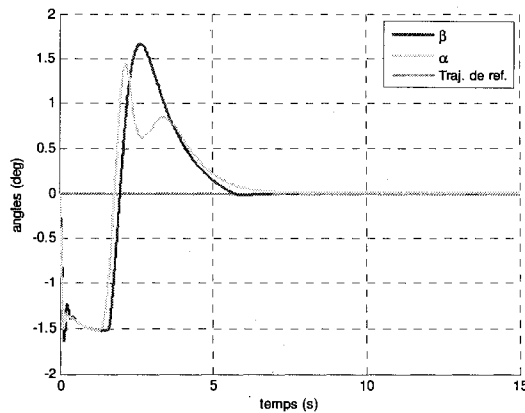


Figure 7.14 : Angles obtenus par le MPC linéaire discret avec contraintes basé le modèle variables d'état

Les figures démontrent l'efficacité de cette loi de commande. En effet, les contraintes sont presque exactement respectées sans que le temps de stabilisation soit affecté significativement. En fait, le dépassement est nul, le temps de stabilisation est de 5.50 secondes pour un effort de commande de 12.6 secondes et les angles oscillent entre -1.64 et 1.67 degré. Il est à noter que les légères violations des contraintes sont dues à l'erreur de prédiction liée à la linéarisation des équations dynamiques de la grue. Étant donné que la longueur de la corde s'allonge de 0.5 m à 1 m au cours de la simulation (système s'éloigne de son point d'opération) la prédiction devient de moins en moins précise. Ce problème pourrait être réglé en utilisant des techniques de commande prédictive non linéaire.

7.3. Compensateur prédictif non linéaire

Les approches présentées précédemment étaient basées sur le modèle linéarisé autour du point d'opération. Cependant, celui-ci est valide que si la longueur de la corde reste fixe et que la charge oscille peu. Dans le cas contraire, les commandes calculées par le compensateur ne sont pas

version estimée de $\mathbf{x}_s(t)$ permet d'obtenir l'équation de prédiction présentée à la Section 5.2 pour les sorties $\mathbf{y}_{ctl}(t)$. Le modèle est considéré fixe sur l'horizon de prédiction lors de la construction de l'équation de prédiction. Ceci diminue considérablement le nombre de calculs, car le système est linéarisé seulement une fois par cycle. Cette équation de prédiction et la trajectoire de référence future sont utilisées pour définir une fonction qui une fois minimisée permet d'obtenir la commande optimale des actionneurs du système.

- La conversion des données provenant des capteurs (coordonnées sphériques) pour obtenir la position de la charge x_c , y_c et z_c (coordonnées cartésiennes).

Les compensateurs prédictifs non linéaires sont beaucoup plus complexes à mettre en œuvre que ceux présentés précédemment. En effet, il faut utiliser plusieurs algorithmes relativement complexes et la programmation par bloc ne s'y prête pas. Il est plus facile d'opter pour une approche utilisant un programme séquentiel qui s'exécute à chaque échantillon. L'Algorithme 7.1 présente la procédure qui a été développée :

1. Initialiser les paramètres du filtre de Kalman étendu, c'est-à-dire la prédiction de la variance du bruit et des états du système :

$$\begin{aligned} P(1|0) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{x}_s(1|0) &= \mathbf{x}_{s,0} \end{aligned} \quad (7.26)$$

où $\mathbf{x}_{s,0}$ correspond aux états initiaux de la grue.

2. À chaque itération k , faire les étapes 3 à 10.
3. Appliquer l'équation (7.27) pour obtenir la version estimée de $\mathbf{x}_s(k|k)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \mathbf{C}_{grbf,mes}^T (\mathbf{C}_{grbf,mes} \mathbf{P}(k|k-1) \mathbf{C}_{grbf,mes}^T + \mathbf{R}_{KF})^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_s(k|k) &= \mathbf{x}_s(k|k-1) + \mathbf{K} (\mathbf{y}(k|k) - \mathbf{C}_{grbf,mes} \mathbf{x}_s(k|k-1)) \\ \hat{\mathbf{P}}(k|k) &= (\mathbf{I} - \mathbf{K} \mathbf{C}_{grbf,mes}) \mathbf{P}(k|k-1) \end{aligned} \quad (7.27)$$

où $\mathbf{C}_{grbf,mes}$ est une matrice identité, car $\mathbf{p}_{grbf,mes}^c(\mathbf{x}_s(t))$ est déjà linéaire par rapport aux états.

4. Linéariser le modèle avec la boucle interne ouverte autour de $\hat{\mathbf{x}}_s(k|k)$ et de $\mathbf{u}^*(k-1|k-1)$. Pour ce faire, calculer les matrices $\mathbf{A}_{gr,k}^c$, $\mathbf{B}_{gr,k}^c$, $\mathbf{C}_{gr,ctl,k}^c$ et $\mathbf{D}_{gr,ctl,k}^c$ définies à l'équation (7.28) en utilisant les résultats de l'Annexe E,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{gr,k}^c &= \mathbf{A}_{gr}^c(\hat{\mathbf{x}}_s(k|k), \mathbf{u}^*(k-1|k-1)) \\ \mathbf{B}_{gr,k}^c &= \mathbf{B}_{gr}^c(\hat{\mathbf{x}}_s(k|k), \mathbf{u}^*(k-1|k-1)) \\ \mathbf{C}_{gr,ctl,k}^c &= \mathbf{C}_{gr,ctl}^c(\hat{\mathbf{x}}_s(k|k), \mathbf{u}^*(k-1|k-1)) \\ \mathbf{D}_{gr,ctl,k}^c &= \mathbf{D}_{gr,ctl}^c(\hat{\mathbf{x}}_s(k|k), \mathbf{u}^*(k-1|k-1)) \end{aligned} \quad (7.28)$$

où $\mathbf{u}^* = \mathbf{v}^*(k-1|k-1) + k_\beta \beta(k-1|k-1) + k_\alpha \alpha(k-1|k-1)$.

5. Obtenir le modèle avec boucle interne fermée en appliquant l'équation (7.29).

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{grbf,k}^c &= [\mathbf{A}_{gr,k}^c + k_\beta \mathbf{B}_{gr,k,i1}^c \mathbf{C}_{gr,k,i1}^c + k_\alpha \mathbf{B}_{gr,k,i2}^c \mathbf{C}_{gr,k,i2}^c], \quad i = j = 1 \dots s_{gr} \\ \mathbf{B}_{grbf,k}^c &= \mathbf{B}_{gr,k}^c \\ \mathbf{C}_{grbf,ctl,k}^c &= \mathbf{C}_{gr,ctl,k}^c \\ \mathbf{D}_{grbf,ctl,k}^c &= \mathbf{D}_{gr,ctl,k}^c \end{aligned} \quad (7.29)$$

6. Discrétiser le modèle précédant en utilisant une approximation bloqueur d'ordre zéro avec la fonction « c2d » disponible dans MATLAB®. Les matrices d'état deviennent alors $A_{grbf,k}$, $B_{grbf,k}$, $C_{grbf,ctl,k}$ et $D_{grbf,ctl,k}$.
7. Calculer la réponse naturelle définie à l'équation (5.21) du modèle non linéaire avec boucle interne fermée de l'équation (7.25), notée $f_{nl,grbf,y_{ctl,k},N_{12}}$. Pour ce faire, utiliser un algorithme numérique de résolution d'équations non linéaires, comme Runge-Kutta pour obtenir $p_{grbf,ctl} \left(h_{grbf,l}(\hat{x}_s(k|k), \{u_{nom}(k+i|k)\}_{i=0}^{l-1}) \right)$ avec $l = [N_1 \ N_2]$ sachant que $\{u_{nom}(k+i|k)\}_{i=0}^{l-1} = v^*(k-1|k-1)$.
8. Calculer la réponse forcée du système définie à l'équation (5.21) avec boucle interne fermée en fonction de Δv_{N_3} , notée $G_{grbf,y_{ctl,k},N_{123}} \Delta v_{N_3}$ en utilisant le modèle variables d'état discrètes obtenu à l'étape 4.
9. Utiliser l'équation (4.51) pour calculer la séquence optimale $\Delta v^*(k|k)$. Calculer la commande $v^*(k|k) = \Delta v^*(k|k) + v^*(k-1|k-1)$.
10. Appliquer l'équation (7.30) pour obtenir la prédiction des états du modèle et de la variance du bruit,

$$\begin{aligned} x_c(k+1|k) &= h_{grbf,1}(\hat{x}_s(k|k), v^*(k|k)) \\ x_s(k+1|k) &= M^{-1}(x_c(k+1|k)) \\ P(k+1|k) &= A_{grbf,k} \hat{P}(k|k) A_{grbf,k}^T + Q_{KF} \end{aligned} \quad (7.30)$$

où $x_c(k+1)$ peut être obtenu avec une méthode numérique de résolution d'équations différentielles, comme celle utilisée à l'étape 5. À noter que si $N_1 = 1$, il est possible de réutiliser le premier pas de prédiction de la réponse naturelle, calculée à l'étape 5, pour évaluer $x_c(k+1|k)$:

$$x_c(k+1|k) = h_{grbf,1}(x_s(k|k), v^*(k-1|k-1)) + B_{grbf,k} v^*(k|k) \quad (7.31)$$

11. Fin de l'algorithme.

Algorithme 7.1 : Compensateur prédictif non linéaire discret pour la grue à trois axes

Les conditions initiales et les consignes utilisées pour mener les simulations sont respectivement présentées au Tableau 7.1 et au Tableau 7.2. Les paramètres du compensateur sont montrés au Tableau 7.5.

Tableau 7.5 : Paramètres du compensateur prédictif non linéaire discret

Paramètres	Valeurs	
N_1	1	échantillon
N_2	1	échantillons
N_3	25	échantillons
Q_{MPC}	diag([35 350 50 500 30 ...])	—
R_{MPC}	20I	—
Q_{KF}	0.1I	—
R_{KF}	I	—
k_β	8	—
k_α	10	—
$r_{N_{12}}$	$[x_c^* \ \beta^* \ y_c^* \ \alpha^* \ z_c^* \ \dots]^T$	$[m \ rad \ m \ rad \ m \ \dots]$
t_s	0.1	sec

Sans considérer les contraintes, les résultats obtenus, c'est-à-dire les commandes, la position de la charge dans les trois axes et la valeur des angles sont montrées respectivement à la Figure 7.16, à la Figure 7.17 et à la Figure 7.18.

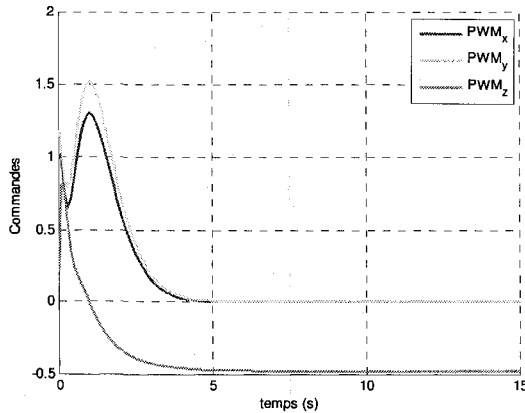


Figure 7.16 : Commandes obtenues par le MPC non linéaire discret

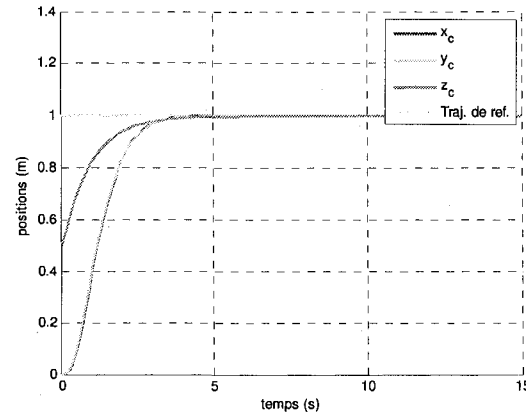


Figure 7.17: Positions de la charge obtenues par le MPC non linéaire discret

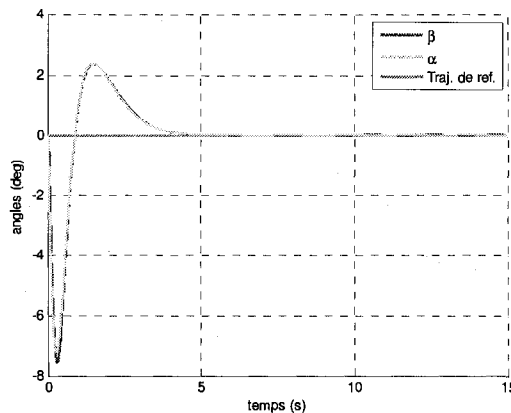


Figure 7.18: Angles obtenus par le MPC non linéaire discret

Ces figures sont semblables à celles obtenues avec le compensateur prédictif linéaire modèle variables d'état sans contrainte. En fait, la charge oscille dans le même intervalle, soit entre -7.56 et 2.39 degrés. Cependant, le temps de stabilisation et l'effort de commande sont moindres. En fait, ceux-ci sont respectivement de 3.80 et 12.10 secondes.

Il est possible d'adapter l'étape 9 de l'Algorithme 7.1 de manière à introduire les contraintes de l'équation (7.23) en utilisant la fonction « quadprog ». Les résultats obtenus sont présentés à la Figure 7.19, à la Figure 7.20 et à la Figure 7.21.

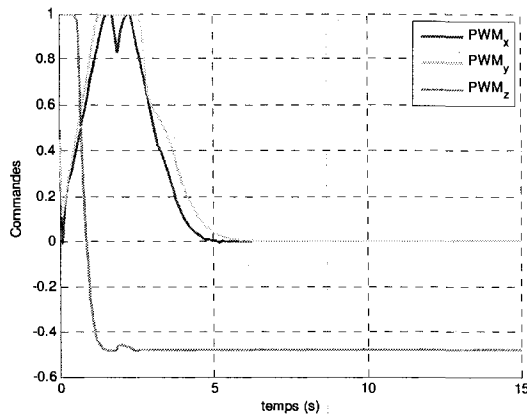


Figure 7.19 : Commandes obtenues par le MPC non linéaire discret avec contraintes

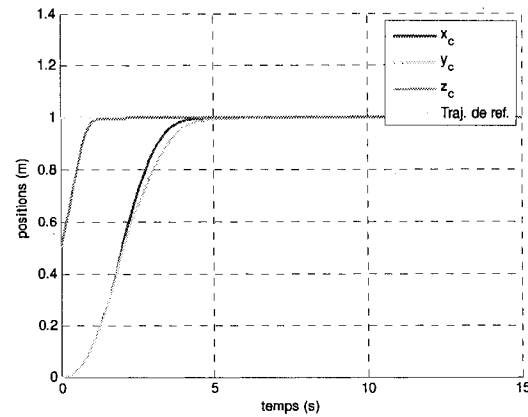


Figure 7.20: Positions de la charge obtenues MPC non linéaire discret avec contraintes

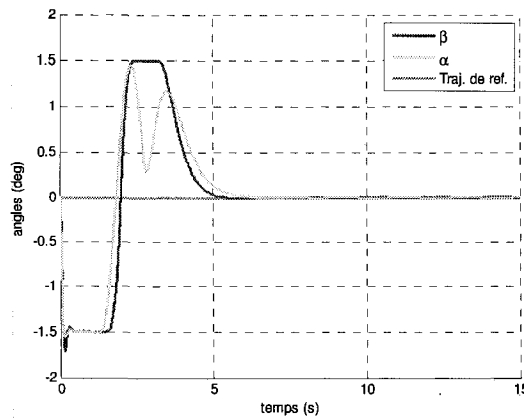


Figure 7.21: Angles obtenus par le MPC non linéaire discret avec contraintes

Les performances obtenues sont excellentes. En fait, le temps de stabilisation et l'effort de commande sont respectivement de 5.00 et 12.6 secondes. De plus, l'angle oscille entre -1.71 et 1.51 degré. Le dépassement des contraintes est beaucoup plus faible qu'avec le compensateur prédictif linéaire du fait que l'algorithme de prédiction est beaucoup plus précis. En effet, la commande est maintenue entre -1 et 1 et les angles ne sortent que très brièvement de l'intervalle -1.5 et 1.5 degré.

7.4. Résumé

Dans ce chapitre, les lois de commande prédictives présentées dans les Chapitres 4 et 5 ont été appliquées sur une grue à trois axes. Les résultats ont montré qu'elles offrent de très bonnes performances et sont faciles à implémenter. De plus, les avantages liés à l'ajout de contraintes lors du processus d'optimisation ont été mis en évidence. Enfin, la version modèle variables d'état des lois de commandes prédictives s'est avérée plus flexible en plus de supporter les modèles non linéaires. Ces expérimentations servent d'introduction au développement de lois de commande prédictives pour une formation de satellites.

CHAPITRE 8

Commande prédictive et vol en formation

Ce chapitre présente le développement de deux lois de commande pour une formation de satellites de type chef-esclave évoluant sur une orbite excentrique. En effet, l'auteur propose d'utiliser la théorie de la commande prédictive pour développer un compensateur basé sur le modèle de Lawden, présenté dans le Chapitre 2, et sur le modèle de GVE linéarisées, abordé dans le Chapitre 3. Les lois de commande proposées par l'auteur combinent en fait les approches de (Schaub et Junkins 2003) et de (Tillerson et How 2001; Breger et How 2004; Breger et How 2005), comme cela a été annoncé au Chapitre 6. Ce chapitre est divisé en deux sections. La première section présente les architectures d'asservissement utilisées pour implémenter ces lois de commande. La deuxième section détaille le développement des lois de commande, à savoir la discrétisation des modèles ainsi que les algorithmes d'observation, de prédiction et d'optimisation. Il est à noter que le contenu de ce chapitre et celui du Chapitre 9 a été publié à la conférence « 18th Space Flight Mechanics Meeting » organisée par l'« American Institute of Aeronautic and Aerospace » (AIAA). Pour plus de détails référer à l'article (Simard Bilodeau 2008).

8.1. Architecture d'asservissement

Dans la littérature, il existe peu d'auteurs qui ont développé des architectures d'asservissement pour une formation de satellites. En fait, ceux-ci s'attardent davantage au développement de la loi de commande. Cette section s'intéresse à ce sujet et présente les architectures développées par l'auteur utilisant des compensateurs prédictifs basés sur le modèle de Lawden et de GVE linéarisées.

La première architecture d'asservissement présentée utilise le compensateur prédictif basé sur le modèle de Lawden. Celle-ci est montrée à la Figure 8.1.

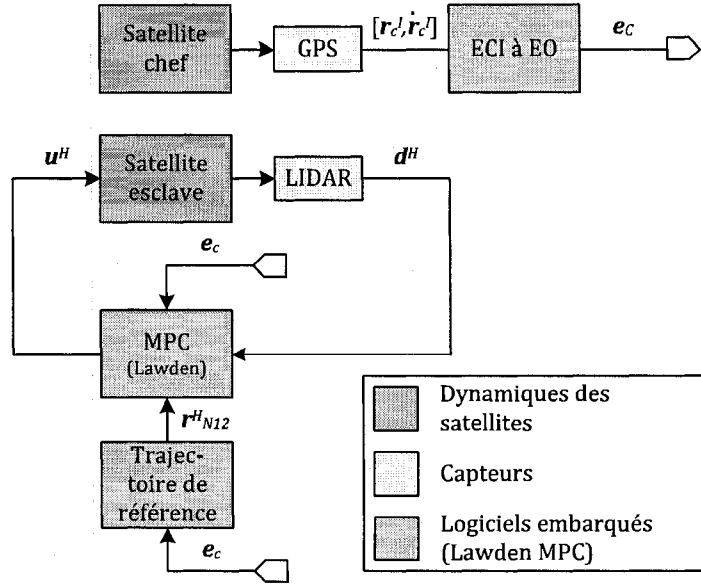


Figure 8.1 : Architecture d'asservissement pour une formation de satellites avec un compensateur prédictif basée sur le modèle de Lawden

La dynamique des satellites chef et esclave, les capteurs et les logiciels embarqués nécessaires pour implémenter la loi de commande sont respectivement présentés par les boîtes de couleur bleue, verte et orange. Ces éléments interagissent comme l'explique le paragraphe qui suit :

Premièrement, la position et la vitesse du satellite chef, notées $[r_c^I \quad \dot{r}_c^I]$, sont mesurées par un système de positionnement global (GPS) de manière à évaluer les éléments d'orbite de ce dernier, noté e_c , à l'aide de l'Algorithme 8.1 représenté par le bloc *ECI à EO*. Celui-ci a été développé avec les informations présentées dans le Chapitre 2 et dans le volume de (Bate 1971). Aux environs de l'apogée d'une orbite fortement excentrique, il est probable qu'il soit impossible de communiquer avec les satellites GPS, car l'altitude est trop élevée. À ce moment, il faudrait considérer l'utilisation d'un propagateur très performant et ce n'est pas le but de la présente étude. Par conséquent, il est considéré que les données GPS sont toujours disponibles.

1. Calculer la quantité de mouvement angulaire présentée à l'équation (2.15) et rapportée à l'équation suivante :

$$h^I = (r^I)^{\times} \dot{r}^I = [h_x \quad h_y \quad h_z]^T \quad (8.1)$$

2. Évaluer les composantes du vecteur \vec{l} , présenté à la Section 2.1, qui décrivent la ligne des nœuds dans le repère inertiel :

$$l^I = [-h_y \quad h_x \quad 0]^T \quad (8.2)$$

Dans le cas où la norme de ce vecteur est nulle, il faut poser $l^I = [1 \quad 0 \quad 0]^T$. Cette situation est rencontrée lorsque que le vecteur \vec{h} est parallèle avec \vec{l}_x .

3. Calculer l'argument de latitude en appliquant l'équation suivante :

$$u = \tan^{-1} \frac{((l')^{\times} r')^T h'}{h((l')^T r')} \quad (8.3)$$

Cette équation peut être démontrée en utilisant les expressions des composantes de \vec{l} , \vec{r} et \vec{h} dans le repère $\vec{\mathcal{S}}_I$, pouvant être obtenues avec les explications de la Section A.5.

4. Calculer l'inclinaison à partir de la composante selon \vec{l}_z de la quantité de mouvement angulaire :

$$i = \cos^{-1} \left(\frac{h_z}{h} \right) \quad (8.4)$$

5. Calculer les composantes exprimées dans le repère inertiel du vecteur \vec{e} :

$$\mathbf{e}^I = \frac{1}{\mu} \left[\left(v^2 - \frac{\mu}{r} \right) \mathbf{r}^I - ((\mathbf{r}^I)^T \mathbf{v}^I) \right] = [e_x \quad e_y \quad e_z]^T \quad (8.5)$$

L'origine de ce vecteur est le centre de la Terre et celui-ci pointe vers le périégée de l'orbite. De plus, son module correspond à l'excentricité de l'orbite.

6. Calculer l'argument du périégée en utilisant l'équation suivante :

$$\omega = \text{sign}(e_z) \cos^{-1} \frac{(l')^T \mathbf{e}^I}{le} \quad (8.6)$$

7. Calculer l'ascension droite du nœud ascendant :

$$\Omega = \tan^{-1} \left(\frac{h_x}{-h_z} \right), \quad \text{si } i \neq 0$$

$$\Omega = 0, \quad \text{si } i = 0 \quad (8.7)$$

8. Calculer l'axe semi-majeur. Pour ce faire, deux approches sont proposées. La première approche est obtenue en mettant en évidence le paramètre a dans l'équation (2.22) :

$$a = \frac{h^2}{\mu(1 - e^2)} \quad (8.8)$$

La deuxième approche propose de substituer le terme h^2/μ de l'équation précédente en utilisant l'équation (2.19) :

$$a = \frac{r(1 + e \cos(u - \omega))}{1 - e^2} \quad (8.9)$$

Cette alternative est moins sensible aux perturbations de l'orbite reliées au propulseur du satellite, car il n'utilise pas le vecteur vitesse de ce dernier (la quantité de mouvement angulaire dépend de la vitesse inertielle du satellite).

9. Fin de l'algorithme.

Algorithme 8.1 : Correspondance non linéaire entre les éléments d'orbite d'un satellite et ses coordonnées inertielles

Deuxièmement, la position relative du satellite esclave est mesurée par un « Light Detection And Ranging » (LIDAR).

Troisièmement, le bloc trajectoire de référence calcule la consigne future nécessaire au compensateur prédictif sur un horizon fini. L'algorithme utilisé dépend du type de formation désirée. En effet, dans le cas où la formation à maintenir ou à atteindre est artificielle, la consigne est constante dans le temps en position et nulle en vitesse. Il est évident que dans cette situation, la génération de la consigne ne requiert pas plus d'information. Dans le cas d'une formation naturelle, c'est-à-dire lorsque le compensateur ne lutte que contre les perturbations pour maintenir la

formation, la trajectoire varie dans le temps et ce sur les trois axes du repère de Hill selon la solution homogène du modèle de Lawden. Pour définir cette trajectoire, il faut considérer que :

- La formation désirée est définie par les six éléments d'orbite initiaux du satellite chef, noté e_c , ainsi que par les vecteurs relatifs $d^H = [x \ y \ z]$ et $\dot{d}^H = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]$ initiaux exprimés dans le repère de Hill.
- Les éléments d'orbite du satellite chef sont disponibles à chaque pas en temps t_s .

Ces paramètres sont utilisés par l'algorithme suivant :

1. Utiliser l'Algorithme 2.1 pour calculer les conditions initiales du modèle de Lawden, c'est-à-dire d_{xy} et d_z , et pour calculer la trajectoire future correspondant au vecteur temps $t = [t_s N_1 \ \dots \ t_s N_2]$ défini par $r_{N_{12}|0}^H = [r_{N_1|0}^H \ \dots \ r_{N_2|0}^H]^T$. Il est à noter que N_1 et N_2 correspondent à l'horizon de prédiction du compensateur.
2. Pour chaque nouvel échantillon k faire les étapes 3 à 6.
3. Utiliser l'anomalie vraie du satellite chef pour obtenir le temps t_k en utilisant la procédure de la Section 2.2.
4. Calculer l'anomalie vraie pour le temps $t_{k+N_2} = t_k + t_s N_2$ avec la démarche présentée à la Section 2.2.
5. Évaluer $r_{k+N_2|k}^H$ avec la solution du modèle de Lawden en utilisant les conditions initiales calculées à l'étape 1.
6. Former le vecteur $r_{N_{12}|k}^H = [r_{k+N_1|k-1}^H \ \dots \ r_{k-1+N_2|k-1}^H \ r_{k+N_2|k}^H]^T$.
7. Fin de l'algorithme

Algorithme 8.2 : Génération de la trajectoire $r_{N_{12}|k}^H$

Finalement, le MPC calcule la commande quasi-optimale pour corriger l'erreur future de la formation. Cette commande, en Newtons, est exprimée dans le repère de Hill. Celle-ci doit donc être traitée adéquatement selon la configuration des propulseurs du satellite esclave et l'orientation de ce dernier. Cependant, cet aspect n'est pas traité dans ce travail. En fait, il est considéré que l'orientation du satellite esclave est asservie de manière à ce que ses trois propulseurs soient alignés avec les axes du repère inertiel. Le compensateur est découplé en deux selon le mouvement dans le plan et hors du plan. Ce compensateur utilise le modèle de Lawden rapporté à l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x}_{xy}(t) &= A_{Law,xy}^c x_{xy}(t) + B_{Law,xy}^c u_{xy}(t) \\ y_{Law,xy}(t) &= C_{Law,xy}^c x_{xy}(t) \\ \dot{x}_z(t) &= A_{Law,z}^c x_z(t) + B_{Law,z}^c u_z(t) \\ y_{Law,z}(t) &= C_{Law,z}^c x_z(t) \end{aligned} \quad (8.10)$$

où $x_{xy} = [x \ y \ \dot{x} \ \dot{y}]$, $x_z = [z \ \dot{z}]$, $C_{Law,xy}$ et $C_{Law,z}$ sont des matrices identités de dimensions 4×4 et 2×2 . Ceci permet de réduire considérablement la puissance de calcul requise. Les compensateurs utilisent les éléments d'orbite du satellite chef, la future trajectoire de référence et la position relative du satellite esclave. La section suivante présente en détail le développement de la loi de commande.

L'architecture d'asservissement, développée par l'auteur, utilisant le compensateur prédictif basé sur le modèle GVE linéarisées est présentée à la Figure 8.2.

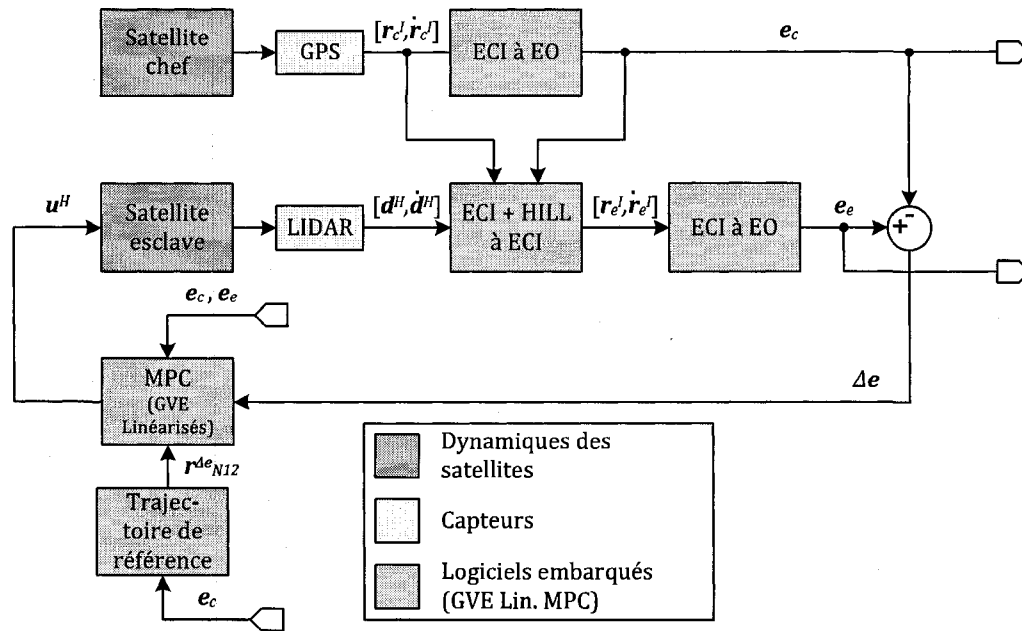


Figure 8.2 : Architecture d'asservissement pour une formation de satellites avec un compensateur prédictif basée sur le modèle de GVE linéarisées

Cette architecture est légèrement différente de celle utilisant le MPC de Lawden à la Figure 8.1 :

Premièrement, la position et la vitesse inertielles du satellite chef sont mesurées par un GPS. Ces mesures sont utilisées par l'algorithme *ECI à EO* identique à celui utilisé dans l'architecture de la Figure 8.1. Cependant, celui-ci évalue aussi la valeur de l'anomalie moyenne, car le modèle de GVE linéarisées utilise ce paramètre au lieu de l'argument de latitude. Pour la calculer, il faut simplement appliquer les équations (2.28) et (2.29).

Deuxièmement, les données provenant du GPS sont utilisées avec celles provenant du LIDAR de manière à calculer la position et la vitesse inertielles du satellite esclave, c'est-à-dire $[r_e^I \quad \dot{r}_e^I]$. Pour ce faire, l'Algorithme 8.3 est utilisé.

1. Calculer la matrice de rotation C_{OI} entre le repère inertiel et orbital définie à l'équation 1.1, à partir des éléments d'orbite du satellite chef
2. Évaluer le rayon de l'orbite du satellite chef, introduit respectivement à l'équation (2.19), en utilisant les éléments d'orbite du satellite chef et l'équation suivante :

$$r_c = \frac{p_c}{(1 + e_c \cos(u_c - \omega_c))} \quad (8.11)$$

3. Calculer la vitesse angulaire du repère orbital $\vec{\mathfrak{S}}_O$ par rapport au repère inertiel $\vec{\mathfrak{S}}_I$, noté ω_{OI}^O , définie à l'équation

(2.50) et reportée à l'équation (8.12) encore une fois à partir des éléments d'orbite du satellite chef.

$$\omega_{OI}^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sqrt{\mu/r_c^3} \end{bmatrix}^T \quad (8.12)$$

4. Utiliser l'équation (8.13) qui découle des équations (2.5) et (2.6), pour obtenir la position et la vitesse inertielles du satellite esclave, notées respectivement \mathbf{r}_e^I et $\dot{\mathbf{r}}_e^I$, à partir de \mathbf{C}_{OI} , ω_{OI}^0 et $[\mathbf{d}^H \quad \dot{\mathbf{d}}^H]$.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_e^I &= \mathbf{r}_c^I + \mathbf{C}_{OI}^T \mathbf{d}^H \\ \dot{\mathbf{r}}_e^I &= \dot{\mathbf{r}}_c^I + \mathbf{C}_{OI}^T (\dot{\mathbf{d}}^H + (\omega_{OI}^0)^\times \mathbf{d}^H) \end{aligned} \quad (8.13)$$

5. Fin de l'algorithme.

Algorithme 8.3 : Calcul de la position et vitesse inertielles du satellite esclave à partir de sa position et vitesse relatives et de la position et vitesse inertielles du satellite chef

Troisièmement, la position et la vitesse inertielles du satellite esclave sont converties en éléments d'orbite en utilisant l'algorithme *ECI à EO*. Cette conversion permet de calculer la différence des éléments d'orbite entre le satellite chef et le satellite esclave nécessaire au compensateur prédictif. Il est à noter qu'il faut prendre des dispositions particulières pour éviter les retournements aux environs de 2π pour les éléments d'orbite exprimés en radians. En fait, il suffit de s'assurer que les angles sont dans l'intervalle $-\pi$ à π avant d'être différenciés.

Quatrièmement, le bloc trajectoire de référence calcule la consigne future nécessaire au compensateur prédictif exprimée en termes des différences des éléments d'orbite. La situation est inversée par rapport à l'architecture avec le compensateur de Lawden. En effet, la trajectoire varie dans le temps pour une formation artificielle et est fixe pour une formation naturelle. L'Algorithme 8.4 explique comment obtenir la consigne en différence d'éléments d'orbite pour une formation artificielle à partir des éléments d'orbite initiaux du satellite chef, la position et la vitesse relatives initiales du satellite esclave ainsi que les éléments d'orbite du satellite chef à chaque pas en temps.

1. Considérer le vecteur temps $\mathbf{t} = [t_s N_1 \quad \dots \quad t_s N_2]$. Pour tous les éléments de ce vecteur, notés t_k , faire les étapes 2 à 4 pour obtenir le vecteur $\mathbf{r}_{N_2|0}^{\Delta e} = [\mathbf{r}_{N_1|0}^{\Delta e} \quad \dots \quad \mathbf{r}_{N_2|0}^{\Delta e}]^T$.
2. Utiliser la démarche expliquée dans la Section 2.2 pour calculer l'anomalie vraie θ_k , à partir de t_k .
3. Calculer l'argument de latitude u_k correspondant à une anomalie de θ_k en utilisant l'argument du périégée initial du satellite chef. Utiliser la valeur de u_k ainsi que les autres éléments d'orbite initiaux du satellite chef pour évaluer la matrice $\mathbf{M}(\mathbf{e}_c)_k$ définie à la Section C.
4. Multiplier l'inverse de la matrice $\mathbf{M}(\mathbf{e}_c)_k$ avec le vecteur $[\mathbf{d}^H \quad \dot{\mathbf{d}}^H]$ de manière à obtenir $\mathbf{r}_{k|0}^{\Delta e}$.
5. Pour chaque nouvel échantillon k faire les étapes 6 à 10.
6. Utiliser l'anomalie vraie du satellite chef pour obtenir le temps t^k en utilisant la procédure de la Section 2.2.
7. Calculer l'anomalie vraie, $\theta_{k+N_2|k}$ pour le temps $t_{k+N_2} = t_k + t_s N_2$ avec la démarche présentée à la Section 2.2.
8. Calculer l'argument de latitude $u_{k+N_2|k}$ correspondant à une anomalie de $\theta_{k+N_2|k}$ en utilisant l'argument du périégée

du satellite chef. Utiliser la valeur de $u_{k+N_2|k}$ ainsi que les autres éléments d'orbite du satellite chef pour former $e_{c,k+N_2|k}$ et ainsi évaluer la matrice $M(e_{c,k+N_2|k})$.

9. Multiplier l'inverse de la matrice $M(e_{c,k+N_2|k})$ avec le vecteur $[d^H \quad \dot{d}^H]$ qui définit la formation artificielle de manière à obtenir $r_{k+N_2|k}^{\Delta e}$.

10. Former le vecteur $r_{k+N_2|k}^{\Delta e} = [r_{k+N_1|k-1}^{\Delta e} \quad \dots \quad r_{k-1+N_2|k-1}^{\Delta e} \quad r_{N_2|k}^{\Delta e}]^T$.

11. Fin de l'algorithme.

Algorithme 8.4 : Génération de la trajectoire $r_{N12|k}^{\Delta e}$

Finalement, le MPC calcule la commande quasi-optimale du système exprimée dans le repère de Hill. Ce MPC utilise le modèle de GVE linéarisées développé par l'auteur. Pour l'obtenir, il faut simplement soustraire la dynamique des éléments d'orbite du satellite chef, non commandée :

$$\dot{e}_c = A_{GVE}^c(e_c) \quad (8.14)$$

de la dynamique des éléments d'orbite du satellite esclave :

$$\dot{e}_e = A_{GVE}^c(e_e) + \frac{1}{m} B_{GVE}^c(e_e) u^H \quad (8.15)$$

où m est la masse du satellite. De cette manière, l'équation suivante est obtenue :

$$\Delta \dot{e} = A_{GVE}^c(e_e) - A_{GVE}^c(e_c) + \frac{1}{m} B_{GVE}^c(e_e) u^H \quad (8.16)$$

Celle-ci peut être simplifiée en linéarisant les deux premiers termes de son membre de droite par rapport autour des éléments d'orbite du satellite chef :

$$A_{GVE}^c(e_e) - A_{GVE}^c(e_c) \approx \left. \frac{\partial A_{GVE}^c(e)}{\partial e} \right|_{e=e_c} \Delta e = A_{GVEL}^c(e_c) \Delta e \quad (8.17)$$

En substituant l'équation précédente dans l'équation (8.16) et sachant que $B_{GVEL}^c(e_e) = B_{GVE}^c(e_e)/m$, le modèle GVE linéarisées est obtenu :

$$\begin{aligned} \Delta \dot{e} &= A_{GVEL}^c(e_c) \Delta e + B_{GVEL}^c(e_e) u^H \\ \gamma_{GVEL} &= C_{GVEL}^c \Delta e \end{aligned} \quad (8.18)$$

où C_{GVEL}^c est une matrice identité 6×6 . Ce modèle, proposé par le candidat, est similaire à celui présenté à la Section 3.2.1. Cependant, il correspond à la dynamique de la différence des éléments d'orbite entre deux satellites plutôt que l'erreur des éléments d'orbite d'un satellite par rapport à ceux qui sont désirés. Cette nouvelle formulation, beaucoup plus intuitive, permet d'utiliser directement la trajectoire de référence définie précédemment. La précision de ce modèle est démontrée à la section suivante.

8.2. Développement de la loi de commande prédictive

La structure du compensateur prédictif basé sur le modèle de Lawden et de GVE linéarisées est présentée à la Figure 8.3.

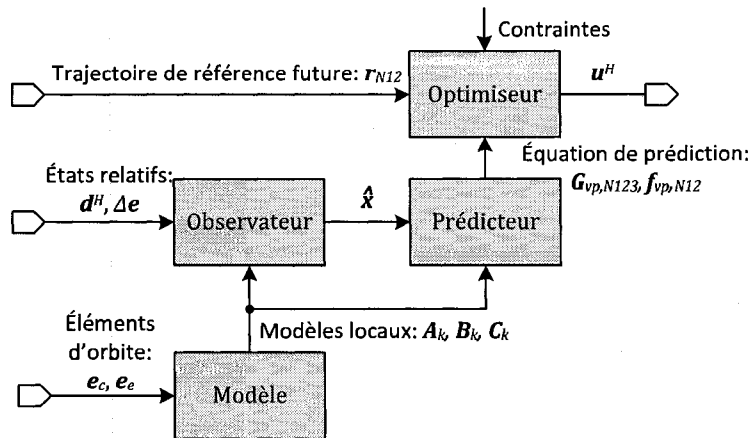


Figure 8.3 : Compensateur prédictif linéaire à paramètres variant discrets proposé basé sur le modèle de Lawden ou GVE linéarisées

Celle-ci s'inspire de la théorie présentée aux Chapitres 4 et 5. Cependant, l'algorithme du compensateur a été adapté par le candidat pour utiliser les modèles linéaires à paramètres variant.

En fait, celui-ci se sépare en quatre parties et à chaque échantillon k :

- Le modèle embarqué est évalué selon la valeur des éléments d'orbite des satellites de la formation pour obtenir le modèle local. Pour le compensateur basé sur le modèle de Lawden, seulement l'anomalie vraie du satellite chef est requise tandis que pour celui basé sur GVE linéarisées, les éléments d'orbite du satellite chef et esclave sont nécessaires. De plus, le modèle local obtenu est discrétisé.
- L'observateur d'état utilise les données des capteurs pour estimer la valeur des états requis pour faire la prédiction du comportement de la formation. Celui-ci joue un rôle très important. En effet, il permet d'obtenir certains états non mesurés, mais observables, et il réduit le bruit des mesures. L'observateur utilise le modèle variables d'état local discret présenté au point précédent.
- Le prédicteur utilise la valeur des états estimés et le modèle embarqué pour obtenir la réponse naturelle et forcée du système en fonction de la séquence de commande future.
- L'optimiseur calcule la commande quasi-optimale en minimisant une fonction coût qui inclut les informations fournies par le prédicteur, la trajectoire de référence et les contraintes.

Les sections qui suivent expliquent en détail chacune des parties de l'algorithme du compensateur prédictif.

8.2.1. Discrétisation des modèles

Sur une période d'orbite, les éléments d'orbite du satellite chef et esclave changent. Plus précisément, dans un environnement non perturbé, l'anomalie vraie du satellite chef évolue

périodiquement tandis que tous les éléments d'orbite du satellite esclave varient sous l'effet des actionneurs. Ceci modifie significativement la dynamique de la formation, particulièrement lorsque l'excentricité est élevée. Par conséquent, à chaque pas en temps t_s , le modèle variables d'état de la formation est évalué pour différentes valeurs d'éléments d'orbite, c'est-à-dire les éléments d'orbite courants et futurs (si nécessaire) sur l'horizon de prédiction. Ces modèles locaux désignés par A_k^c , B_k^c , et C^c sont par la suite discrétisés pour être utilisés dans l'algorithme du prédicteur. Il est à noter que C^c n'a pas d'indice k , car cette matrice ne varie pas dans le temps.

Pour le modèle de Lawden et GVE linéarisées, il est proposé d'utiliser une discrétisation avec bloqueur d'ordre zéro définie à l'équation suivante :

$$\begin{aligned} x(k+1|k) &= \underbrace{e^{A_k^c t_s}}_{A_k} x(k|k) + \underbrace{\int_0^{t_s} e^{A_k^c v} dv}_{B_{ss,k|k}} B_k^c u(k|k) \\ y(k+1|k) &= \underbrace{C^c}_C x(k+1|k) \end{aligned} \quad (8.19)$$

où A_k , B_k et C sont les matrices du modèle variables d'état local discret. Le premier membre de cette équation correspond à la matrice d'états de transition du système et le deuxième correspond à la convolution entre cette matrice d'états de transition et les entrées. Les matrices A_k et B_k peuvent être approximées en utilisant une série de Padé de premier ordre montrée à l'équation (8.20),

$$\begin{aligned} A_k &\approx \left(I - \frac{A_k^c t_s}{2} \right)^{-1} \left(I + \frac{A_k^c t_s}{2} \right) \\ B_k &\approx \left(I - \frac{A_k^c t_s}{2} \right)^{-1} B_k^c t_s \end{aligned} \quad (8.20)$$

où I est une matrice identité de dimension appropriée. L'approximation par série de Taylor a aussi été considérée. Cependant, l'ordre de la troncature doit être significativement élevé pour obtenir une bonne précision. La version discrète de la matrice C^c est identique à la version continue. Pour simplifier l'implémentation et diminuer le temps de calcul, l'auteur a développé analytiquement la version discrète des modèles. Le modèle de Lawden discret découplé selon le mouvement dans le plan et hors du plan est montré respectivement aux équations suivantes :

$$\begin{aligned} A_{LAW,xy} &= \frac{\begin{bmatrix} 1 + \frac{gt_s^2}{4} - \frac{cdt_s^4}{16} & \frac{\dot{\theta}ct_s^3}{2} & -\left(t_s + \frac{ct_s^3}{4}\right) & t_s^2\dot{\theta} \\ -\frac{\dot{\theta}dt_s^3}{2} & 1 + \frac{ht_s^2}{4} - \frac{cdt_s^4}{16} & -\dot{\theta}t_s^2 & \left(t_s - \frac{dt_s^3}{4}\right) \\ d\left(t_s - \frac{ct_s^3}{4}\right) & \dot{\theta}ct_s^2 & 1 - \frac{ht_s^2}{4} - \frac{cdt_s^4}{16} & 2\dot{\theta}t_s \\ -\dot{\theta}dt_s^2 & c\left(t_s - \frac{dt_s^3}{4}\right) & -2\dot{\theta}t_s & 1 - \frac{gt_s^2}{4} - \frac{cdt_s^4}{16} \end{bmatrix}}{\det(A_{LAW,xy,k}^c)} \\ C_{LAW,xy} &= I_{4 \times 4} \end{aligned} \quad \begin{aligned} B_{LAW,xy} &= \frac{\begin{bmatrix} \frac{ct_s^4}{8} - \frac{t_s^2}{2} & \frac{t_s^3\dot{\theta}}{2} \\ -\frac{\dot{\theta}t_s^3}{2} & \frac{t_s^2}{2} - \frac{t_s^4d}{8} \\ t_s - \frac{t_s^3c}{4} & \frac{t_s^2\dot{\theta}}{2} \\ -\dot{\theta}t_s^2 & t_s - \frac{t_s^3d}{4} \end{bmatrix}}{m \det(A_{LAW,xy,k}^c)} \end{aligned} \quad (8.21)$$

$$A_{LAW,z} = \frac{\begin{bmatrix} 1 - \frac{bt_s^2}{4} & t_s \\ -bt_s & 1 - \frac{bt_s^2}{4} \end{bmatrix}}{\det(A_{LAW,z,k}^c)} \quad B_{LAW,z} = \frac{\begin{bmatrix} t_s^2 \\ 2 \\ t_s \end{bmatrix}}{m \det(A_{LAW,z,k}^c)} \quad (8.22)$$

$$C_{LAW,z} = I_{2 \times 2}$$

où $c = (\dot{\theta}^2 - \ddot{\theta} - b)$, $d = (\dot{\theta}^2 + \ddot{\theta} + 2b)$, $g = (4\dot{\theta}^2 - c + d)$, $h = (4\dot{\theta}^2 + c - d)$, $\det(A_{LAW,xy,k}^c) = 1 + (4\dot{\theta}^2 - c - d)t_s^2 + cdt_s^4$ et $\det(A_{LAW,z,k}^c) = 1 + bt_s^2$. Le modèle GVE linéarisées est beaucoup plus facile à discrétiser, car la matrice $A_{GVEL,k}^c$ contient seulement un élément non nul :

$$A_{GVEL} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3n}{a}t_s & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B_{GVEL} = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} \frac{2a^2 e \sin \theta}{h} t_s & \frac{2a^2}{hr} t_s & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2r \cos u}{h} t_s \\ \frac{p \sin \theta}{h} t_s & \frac{(p+r) \cos \theta + re}{h} t_s & 0 \\ -\frac{p \cos \theta}{he} t_s & \frac{(p+r) \sin \theta}{he} t_s & \frac{r \sin u}{h \tan i} t_s \\ 0 & 0 & \frac{r \sin u}{h \sin i} t_s \end{bmatrix} \quad (8.23)$$

$$C_{GVEL} = I_{6 \times 6}$$

$$\text{où } B_{21} = \frac{\eta(p \cos \theta - 2re)}{he} t_s - \frac{3nae \sin \theta}{h} t_s^2, \quad B_{22} = -\frac{\eta(p+r) \sin \theta}{he} t_s - \frac{3na}{hr} t_s^2.$$

8.2.2. Observateur

La nécessité d'un observateur d'états pour les lois de commande prédictive basée sur un modèle variables d'état a été démontrée dans le Chapitre 4. Pour une formation de satellites, l'auteur propose d'utiliser une version simplifiée du filtre de Kalman étendu. Les algorithmes de propagation et de mise à jour de ce filtre sont présentés aux équations suivantes :

$$\begin{aligned} \bar{x}(k|k-1) &= A_{k-1} \bar{x}(k-1|k-1) + B_{k-1} u(k-1|k-1) \\ \bar{P}(k|k-1) &= A_{k-1} \bar{P}(k-1|k-1) A_{k-1}^T + Q_{KF} \end{aligned} \quad (8.24)$$

$$\begin{aligned} K &= \bar{P}(k|k-1) C^T (C \bar{P}(k|k-1) C^T + R_{KF})^{-1} \\ \hat{x}(k|k) &= \bar{x}(k|k-1) + K(y(k|k) - C \bar{x}(k|k-1)) \\ \hat{P}(k|k) &= (I - KC) \bar{P}(k|k-1) \end{aligned} \quad (8.25)$$

où les matrices A_k , B_k et C correspondent au modèle discretisé de Lawden ou GVE linéarisées présentées aux équation (8.21), (8.22) et (8.23), évaluées aux éléments d'orbite e_c et e_e . Étant donné que ces modèles locaux sont linéaires, il n'est pas nécessaire de faire intervenir un algorithme numérique de résolution d'équations différentielles pour évaluer la valeur future des états. Il suffit simplement d'utiliser directement le modèle variables d'état discret.

8.2.3. Prédicteur

Le prédicteur, comme expliqué dans le Chapitre 4, calcule les réponses naturelle et forcée futures du système en fonction de la séquence de commande future u_{N_3} . De la même façon que pour les lois de commande prédictives non linéaires, l'équation de prédiction est mise à jour à chaque échantillon :

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{y}(k+N_1|k) \\ \bar{y}(k+N_1+1|k) \\ \vdots \\ \bar{y}(k+N_2|k) \end{bmatrix}}_{\bar{y}_{N_{12}}} &= \underbrace{\begin{bmatrix} C \prod_{i=1}^{N_1} A_{k+i-1} \\ C \prod_{i=1}^{N_1+1} A_{k+i-1} \\ \vdots \\ C \prod_{i=1}^{N_2} A_{k+i-1} \end{bmatrix}}_{f_{vp,k,N_{12}}} \hat{x}_k(k|k) \\
 &+ \underbrace{\begin{bmatrix} C \prod_{i=1}^{N_1} A_{k+N_1-i-1} B_k & C \prod_{i=1}^{N_1-1} A_{k+N_1-i-2} B_{k+1} & \dots & C \prod_{i=1}^{N_1-N_2+1} A_{k+N_2-N_1-i} B_{k+N_3-1} \\ C \prod_{i=1}^{N_1+1} A_{k+N_1-i} B_k & C \prod_{i=1}^{N_1} A_{k+N_1-i-1} B_{k+1} & \dots & C \prod_{i=1}^{N_1-N_2+2} A_{k+N_2-N_1-i+1} B_{k+N_3-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C \prod_{i=1}^{N_2} A_{k+N_2-i-1} B_k & C \prod_{i=1}^{N_2-1} A_{k+N_2-i-2} B_{k+1} & \dots & C \prod_{i=1}^{N_2-N_3+1} A_{k+N_2-N_3-i} B_{k+N_3-1} \end{bmatrix}}_{G_{vp,k,N_{123}}} \underbrace{\begin{bmatrix} u(k|k) \\ u(k+1|k) \\ \vdots \\ u(k+N_3-1|k) \end{bmatrix}}_{u_{N_3}}
 \end{aligned} \tag{8.26}$$

Cependant, cette dernière diffère légèrement de l'équation (5.21), du fait que le modèle est linéaire à paramètres variant. Dans la Section 5.2, l'auteur proposait de maintenir constant le modèle sur l'horizon de prédiction pour le discrétiser seulement une fois dans le but de minimiser le nombre de calculs à faire à chaque itération. Pour le vol en formation, l'auteur propose d'aller plus loin et d'évaluer la performance des options suivantes :

- Option 1. Considérer que les modèles changent peu sur l'horizon de prédiction et poser que $A_k \approx A_{k+1} \approx \dots \approx A_{k+N_2-1}$ et $B_k \approx B_{k+1} \approx \dots \approx B_{k+N_3-1}$. Cette approximation est valide pour un axe semi-majeur élevé, une période d'échantillonnage faible, une excentricité faible et/ou un horizon de prédiction faible. Cette option est nommée Prédiction à paramètres Fixes (PF) sur l'horizon.
- Option 2. Appliquer directement l'équation de prédiction **Error! Reference source not found..** Cette option est nommée Prédiction à paramètres Variant (PV) sur l'horizon.
- Option 3. Mettre à jour le modèle local à intervalle constant sur l'horizon de prédiction. Cette approche est un compromis entre les deux techniques précédentes. Cette option est nommée Prédiction à paramètres Variant par Intervalle (PVI) sur l'horizon.

Pour ce faire, la formation de satellites définie au Tableau 2.1 et au Tableau 8.2 est utilisée.

Tableau 8.1 : Éléments d'orbite initiaux du satellite chef

Éléments d'orbite	Valeurs	
a	2.4200×10^7	m
u	$\frac{\pi}{4}$	rad
i	$\frac{\pi}{4}$	rad
e	0.7	
ω	$\frac{\pi}{4}$	rad
Ω	0	rad

Tableau 8.2 : Positions et vitesses relatives initiales du satellite esclave (définies à l'apogée)

Positions relatives (repère de Hill)	Valeurs	
x	200	m
y	200	m
z	200	m
\dot{x}	0	m/s
\dot{y}	-3.592×10^{-2}	m/s
\dot{z}	0	m/s

Il est à noter que l'analyse est effectuée aux environs du périégée, c'est-à-dire la position sur l'orbite où le modèle de la formation varie le plus rapidement. De plus, les modèles sont soumis à une commande constante de 10×10^{-3} Newton (effort de commande moyenne avec des propulseurs à faible poussée). Les compensateurs basés sur le modèle de Lawden et de GVE linéarisées sont implémentés avec une période d'échantillonnage t_s choisie pour permettre respectivement 500 et 150 échantillons par orbite. Cette différence de fréquence d'échantillonnage est différente étant donné que les états relatifs exprimés dans le repère de Hill change beaucoup plus rapidement que la différence d'éléments d'orbite. Enfin, pour l'option 3, le modèle est mis à jour à tous les dix pas en temps. Les performances des approches expliquées précédemment sont démontrées aux figures suivantes :

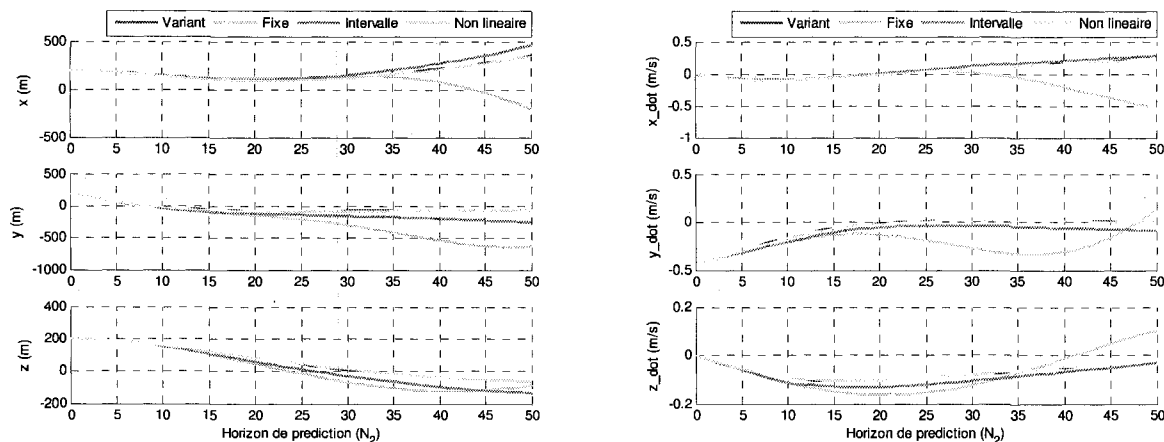


Figure 8.4 : Positions et vitesses relatives en fonction de l'horizon de prédiction obtenues par différentes méthodes de prédiction pour le modèle de Lawden

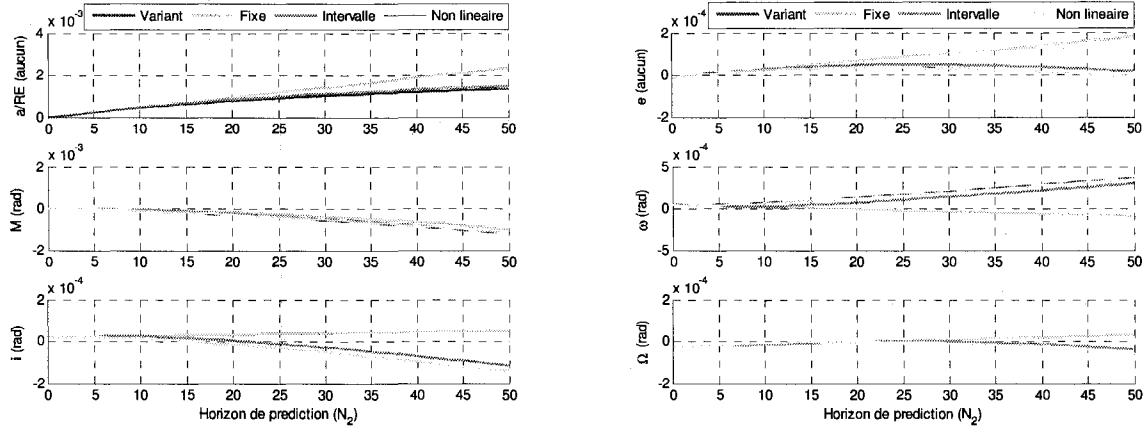


Figure 8.5 : Différence des éléments d'orbite en fonction de l'horizon de prédiction obtenue par différentes méthodes de prédiction pour le modèle de GVE linéarisées

où la désignation « Fixe » correspond à l'option 1, « Variant » à l'option 2 et « Intervalle » à l'option 3. Ces graphiques montrent clairement que l'approche avec modèle fixé sur l'horizon de prédiction est valide pour un horizon plus petit que 25. Dans ce cas, il n'est donc pas avantageux lors de la conception d'une loi de commande prédictive d'utiliser un horizon de prédiction au dessus de ce seuil, car le gain en performance ne serait pas significatif. Par conséquent, au-delà de ces valeurs, les approches 2 ou 3 sont conseillées. Ces commentaires s'appliquent à une orbite très excentrique. Il faut comprendre qu'en diminuant l'excentricité de l'orbite la prédiction à Paramètres Fixes (PF) sur l'horizon offre de meilleures performances.

8.2.4. Optimiseur

L'optimiseur, comme mentionné dans les sections précédentes, minimise une fonction coût définie par le concepteur en respectant des contraintes établies de manière à obtenir la commande optimale à soumettre aux actionneurs du système. La conception de l'algorithme de l'optimiseur débute donc par sélectionner une fonction coût adéquate pour l'application et se termine par établir l'algorithme d'optimisation pour la minimiser en passant par la formulation des contraintes.

Pour une formation de satellites, le candidat propose d'utiliser une fonction coût incluant l'erreur de poursuite de la trajectoire de référence et l'effort de commande future, semblable à celle présentée à l'équation (4.47), mais en utilisant l'équation de prédiction **Error! Reference source not found.** :

$$J_k(u_{N_3}) = (G_{vp,k,N_{123}} u_{N_3} + f_{vp,k,N_{12}} - r_{N_{12}})^T Q_{MPC} (G_{vp,k,N_{123}} u_{N_3} + f_{vp,k,N_{12}} - r_{N_{12}}) + u_{N_3}^T R_{MPC} u_{N_3} \quad (8.27)$$

Cette approche permet d'éviter l'utilisation des contraintes en sorties, comme c'est le cas avec les approches de (Tillerson et How 2001; Breger et How 2004; Breger et How 2005). La loi de commande qui en résulte peut alors être utilisée pour une manœuvre de reconfiguration ou de maintenance. De surcroît, à l'instar des approches précédentes, les reconfigurations s'effectuent en boucle fermée et

l'horizon de prédiction peut être plus court que la durée de la manœuvre. La loi de commande requière moins de puissance de calcul et est beaucoup plus robuste aux perturbations. De plus, la solution est toujours réalisable, c'est-à-dire qu'elle existe toujours peu importe les états du système. En effet, utiliser des contraintes sur les sorties n'est pas sans risque. Il se peut que dans certaines situations les contraintes de sortie soient trop restrictives et qu'aucune solution n'existe. À ce moment, l'algorithme de l'optimiseur ne peut converger. Ce phénomène peut survenir lorsque le compensateur doit travailler dans un environnement plus perturbé que celui dans lequel il a été conçu et peut mettre en péril la mission.

Le satellite esclave est équipé de propulseurs électriques à faible puissance. La commande du compensateur doit donc être maintenue dans l'intervalle opération de ceux-ci. Pour ce faire, deux approches sont possibles :

- Ajuster par essais et erreurs les matrices de pondération du compensateur de manière à ce qu'en simulation la commande n'excède pas la limite des actionneurs.
- Soumettre des contraintes à l'algorithme d'optimisation.

La deuxième alternative est beaucoup plus performante. En effet, il est difficile de couvrir tous les cas de figure en simulation et encore plus de modéliser avec précision les perturbations auxquelles la formation sera soumise une fois en opération. De plus, celle-ci est moins conservatrice, car elle permet d'utiliser toute la puissance nécessaire pour effectuer une manœuvre le plus vite possible tout en minimisant le carburant. Par conséquent, l'auteur propose de soumettre l'optimisation de la fonction coût (8.27) aux contraintes sur les actionneurs suivantes :

$$\underline{u} \leq u_{N_s} \leq \bar{u} \quad (8.28)$$

où \underline{u} et \bar{u} sont respectivement les forces minimum et le maximum réalisables par les propulseurs du satellite esclave.

Il reste à définir l'algorithme qui permet de résoudre le problème d'optimisation posé précédemment et reformulé sous forme de programme quadratique suivant :

$$\min_{u_{N_s}} \{J_k(u_{N_s})\}, \quad \text{sujet à } \begin{bmatrix} -I \\ I \end{bmatrix} u_{N_s} \leq \begin{bmatrix} -\bar{u} \\ \underline{u} \end{bmatrix} \quad (8.29)$$

En fait, ce programme pourrait être transformé en programme linéaire. Ceci permettrait d'utiliser la méthode du Simplex pour le résoudre. Il pourrait aussi être résolu en utilisant directement les méthodes de l'ensemble actif ou du point intérieur. Toutes ces approches ont été présentées à la L'Annexe D. Cependant, ces méthodes numériques de recherche, exécutées à chaque nouvel échantillon, sont difficiles à implémenter sur un système embarqué, vue leur complexité, et demande

beaucoup de temps de calcul. Pour déplacer cette lourde charge de calcul lors de la conception, il serait aussi envisageable d'utiliser les techniques de programmation paramétrique. Cependant, étant donné que l'équation de prédiction varie dans le temps, cette technique requerrait un nombre trop important de régions. Le candidat propose donc d'exploiter la géométrie des problèmes quadratiques pour calculer une solution quasi-optimale en utilisant un algorithme simple et très innovant par rapport à ce qui existe actuellement.

Dans la Section 4.5, il a été démontré qu'une fonction coût quadratique correspond à un hyper-ellipsoïde centré sur la solution optimale non contrainte, noté $\mathbf{u}_{N_3}^*$ et rapporté à l'équation (8.30), dans l'espace de commandes.

$$\mathbf{u}_{N_3}^* = (\mathbf{G}_{vp,k,N_{123}}^T \mathbf{Q}_{MPC} \mathbf{G}_{vp,k,N_{123}} + \mathbf{R}_{MPC})^{-1} \mathbf{G}_{vp,k,N_{123}}^T \mathbf{Q}_{MPC} (\mathbf{r}_{N_{12}} - \mathbf{f}_{vp,k,N_{12}}) \quad (8.30)$$

L'hyper-ellipsoïde qui représente la fonction coût de l'équation (8.27) est défini par :

$$c(\mathbf{u}_{N_3}) = (\mathbf{u}_{N_3} - \mathbf{u}_{N_3}^*)^T \mathbf{W} (\mathbf{u}_{N_3} - \mathbf{u}_{N_3}^*) \quad (8.31)$$

où $\mathbf{W} = (\mathbf{G}_{vp,k,N_{123}}^T \mathbf{Q}_{MPC} \mathbf{G}_{vp,k,N_{123}} + \mathbf{R}_{MPC})$. De la même manière, dans l'espace de commandes, les contraintes sur les entrées peuvent être considérées comme un hyper-cube centré à l'origine. En fait, la solution optimale contrainte, notée $\bar{\mathbf{u}}_{N_3}^*$, peut être trouvée en cherchant le point d'intersection obtenu en variant la valeur de $c(\mathbf{u}_{N_3})$ jusqu'à ce que l'hyper-ellipsoïde devienne tangent à l'hyper-cube. L'affirmation précédente est présentée graphiquement pour une application en deux dimensions à la figure suivante :

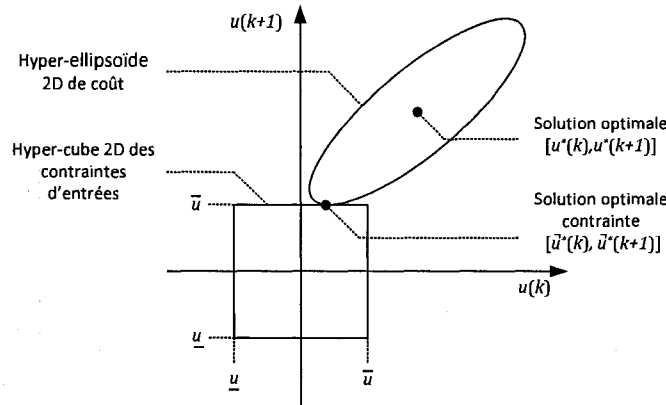


Figure 8.6 : Projection de la fonction coût sur les contraintes d'entrées (exemple en deux dimensions)

Pour obtenir une solution quasi-analytique (explicite), l'auteur propose de considérer que cet hyper-cube de commande réalisable peut être approximé par une hyper-sphère de rayon approprié, noté r . En projetant l'hyper-ellipsoïde de coût sur cette approximation hyper-sphérique et en saturant le résultat pour respecter exactement les contraintes d'entrées, une solution quasi-optimale, notée

$\tilde{\mathbf{u}}_{N_3}^*$, est obtenue. Cette approche est présentée schématiquement pour la même application en deux dimensions à la Figure 8.7.

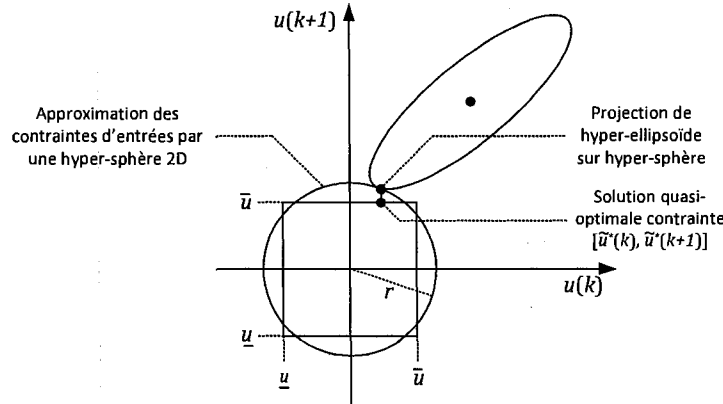


Figure 8.7 : Projection de la fonction coût sur une approximation hyper-sphérique des contraintes d'entrées (exemple en deux dimensions)

Dans cette situation, les contraintes d'entrées sont définies par :

$$z(\mathbf{u}_{N_3}) = (\mathbf{u}_{N_3})^T \mathbf{u}_{N_3} - r^2 = 0 \quad (8.32)$$

Ainsi, seulement deux cas doivent être considérés :

- La solution non contrainte est à l'intérieur de l'hyper-sphère, donc $\tilde{\mathbf{u}}_{N_3}^* = \mathbf{u}_{N_3}^*$.
- La solution non contrainte est en dehors de l'hyper-sphère, donc la contrainte $z(\mathbf{u}_{N_3})$ est active et la fonction coût est projetée sur $z(\mathbf{u}_{N_3})$ pour trouver la solution quasi-optimale contrainte.

L'algorithme de projection est explicite, simple et facile à implémenter. L'idée principale est de trouver la séquence de commandes \mathbf{u}_{N_3} , qui minimise $c(\mathbf{u}_{N_3})$ en respectant la contrainte $z(\mathbf{u}_{N_3})$.

Ceci peut être exprimé mathématiquement par le programme quadratique suivant :

$$\min_{\mathbf{u}_{N_3}} c(\mathbf{u}_{N_3}), \quad \text{sujet à } z(\mathbf{u}_{N_3}) = 0 \quad (8.33)$$

Le Lagrangien peut être facilement formé en ajoutant la variable de Lagrange λ de manière à combiner la contrainte à la fonction coût :

$$L(\mathbf{u}_{N_3}, \lambda) = g(\mathbf{u}_{N_3}) + \lambda f(\mathbf{u}_{N_3}) \quad (8.34)$$

En prenant la dérivée par rapport à \mathbf{u}_{N_3} et λ , les conditions d'optimalité du problème sont établies :

$$\frac{\partial L(\mathbf{u}_{N_3}, \lambda)}{\partial \mathbf{u}_{N_3}} = \mathbf{W}(\mathbf{u}_{N_3} - \mathbf{u}_{N_3}^*) + \lambda \mathbf{u}_{N_3} = 0 \quad (8.35)$$

$$\frac{\partial L(\mathbf{u}_{N_3}, \lambda)}{\partial \lambda} = f(\mathbf{u}_{N_3}) = 0 \quad (8.36)$$

En réorganisant, les équations précédentes sous une forme matricielle, le système d'équations quadratiques suivant est obtenu :

$$H(\mathbf{u}_{N_3}, \lambda) = \begin{bmatrix} \mathbf{W}(\mathbf{u}_{N_3} - \mathbf{u}_{N_3}^*) + \lambda \mathbf{u}_{N_3} \\ (\mathbf{u}_{N_3})^T \mathbf{u}_{N_3} - r^2 \end{bmatrix} = 0 \quad (8.37)$$

Malheureusement, la solution de ce système ne peut être obtenue analytiquement. Cependant, seulement quelques itérations de Newton-Raphson sont requises pour l'approximer avec précision d'où la nature quasi analytique de la solution. Il est à noter qu'une méthode d'approximation successive avec estimation de la dérivée peut aussi être utilisée. Celle-ci ne nécessite pas d'inversion de matrice, mais requiert plus d'itérations. L'Algorithme 8.5 résume le fonctionnement de l'optimisateur.

1. Calculer la solution non contrainte en utilisant l'équation (8.30).
2. Si $(\mathbf{u}_{N_3}^*)^T \mathbf{u}_{N_3}^* \leq r^2$, poser $\tilde{\mathbf{u}}_{N_3}^* = \mathbf{u}_{N_3}^*$ et aller à l'étape 5, sinon continuer.
3. Poser $\begin{bmatrix} (\mathbf{u}_{N_3}^k)^T & \lambda^k \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} (\mathbf{u}_{N_3}^*)^T & 0 \end{bmatrix}^T$, $\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_{N_3}^T & \Delta \lambda \end{bmatrix}^T = [\infty \quad \infty]^T$ et $k = 1$.
4. Pendant que $k \leq 10$ et $(\begin{bmatrix} (\mathbf{u}_{N_3}^k)^T & \lambda^k \end{bmatrix} [\Delta \mathbf{u}_{N_3} \quad \Delta \lambda]) / (\begin{bmatrix} (\mathbf{u}_{N_3}^k)^T & \lambda^k \end{bmatrix}^T [\mathbf{u}_{N_3}^k \quad \lambda^k])$ est plus grande qu'une tolérance donnée, notée *tol*, faire les étapes 5 et 6.
5. Résoudre l'approximation linéaire de l'équation (8.37), montrée à l'équation (8.38) pour $\begin{bmatrix} (\Delta \mathbf{u}_{N_3}^k)^T & \Delta \lambda^k \end{bmatrix}^T$.
$$\begin{bmatrix} \mathbf{W} + \mathbf{I} \lambda^k & \mathbf{u}_{N_3}^k \\ (\mathbf{u}_{N_3}^k)^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_{N_3}^k \\ \Delta \lambda^k \end{bmatrix} = H(\mathbf{u}_{N_3}^k, \lambda^k) \quad (8.38)$$
6. Mettre à jour la solution approximée du système non linéaire de l'équation (8.37) en utilisant l'équation (8.39),
$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_{N_3}^{k+1} \\ \lambda^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{N_3}^k \\ \lambda^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_{N_3}^k \\ \Delta \lambda^k \end{bmatrix} \quad (8.39)$$

et incrémenter k .
7. Saturer le vecteur colonne $\mathbf{u}_{N_3}^{k+1}$ pour obtenir $\tilde{\mathbf{u}}_{N_3}^*$ respectant exactement les contraintes d'entrées.
8. Utiliser le premier élément du vecteur $\tilde{\mathbf{u}}_{N_3}^*$ pour commander les actionneurs du système.
9. Fin de l'algorithme.

Algorithme 8.5 : Algorithme d'optimisation basé sur la projection de la fonction coût

8.3. Résumé

Ce chapitre a présenté deux architectures d'asservissements nouvelles à la Figure 8.1 et à la Figure 8.2 inspirées des approches de (Tillerson et How 2001; Schaub et Junkins 2003; Breger et How 2004; Breger et How 2005). Ces architectures sont basées sur une loi de commande prédictive cartésienne-Hill et par éléments d'orbite utilisant respectivement le modèle de Lawden et de GVE linéarisées. Ces lois de commande présentent les innovations suivantes :

- Les modèles discrets utilisés sont obtenus analytiquement en fonction des éléments d'orbite du satellite esclave et chef. Ceci permet d'éviter de discrétiser le modèle à chaque pas en temps.

- Un filtre de Kalman étendu est utilisé conjointement avec le compensateur prédictif pour estimer les états non mesurés et traiter le bruit provenant des capteurs.
- Des équations de prédiction à paramètre fixes, variant et par intervalle sur l'horizon ont été formulées. Les performances de ces approches ont été préliminairement établies.
- L'erreur de poursuite de la trajectoire est incluse dans la fonction coût quadratique. Ceci permet d'utiliser une seule loi de commande pour la reconfiguration et le maintien de la formation. De plus, les manœuvres de reconfiguration s'effectuent en boucle fermée et l'horizon de prédiction peut être beaucoup plus court que le temps désiré pour faire la manœuvre. Enfin, cela permet aussi d'éviter que la solution optimale soit inexistante.
- Les contraintes d'entrées sont traitées de manière explicite, c'est-à-dire que la solution optimale n'est pas obtenue à l'aide d'un algorithme de recherche (itérer pour trouver les contraintes actives et éventuellement la solution optimale), comme celle présentée dans la Section D. En fait, l'auteur propose d'utiliser un algorithme de projection de la fonction sur une approximation des contraintes d'entrées pour calculer une solution quasi-optimale. Cet algorithme ne requiert que quelques itérations de type Newton-Raphson.

CHAPITRE 9

Simulations et résultats

Ce chapitre démontre la performance des lois de commande présentées dans le chapitre précédent. En fait, la stabilité des compensateurs, les performances des prédicteurs, l'efficacité de l'observateur et la quasi-optimalité de l'optimiseur sont démontrées. De plus, des manœuvres effectuées sur des formations naturelles et artificielles sont présentées pour établir la performance des compensateurs prédictifs. Ce chapitre est divisé en deux sections. La première présente le simulateur non linéaire MATLAB® utilisé tandis que la deuxième présente et analyse les résultats de simulation obtenus avec les compensateurs prédictifs basés sur le modèle Lawden et GVE linéarisés.

9.1. Simulateur non linéaire

Pour évaluer les performances des architectures d'asservissement, le simulateur MATLAB® présenté à la Figure 9.1 a été développé.

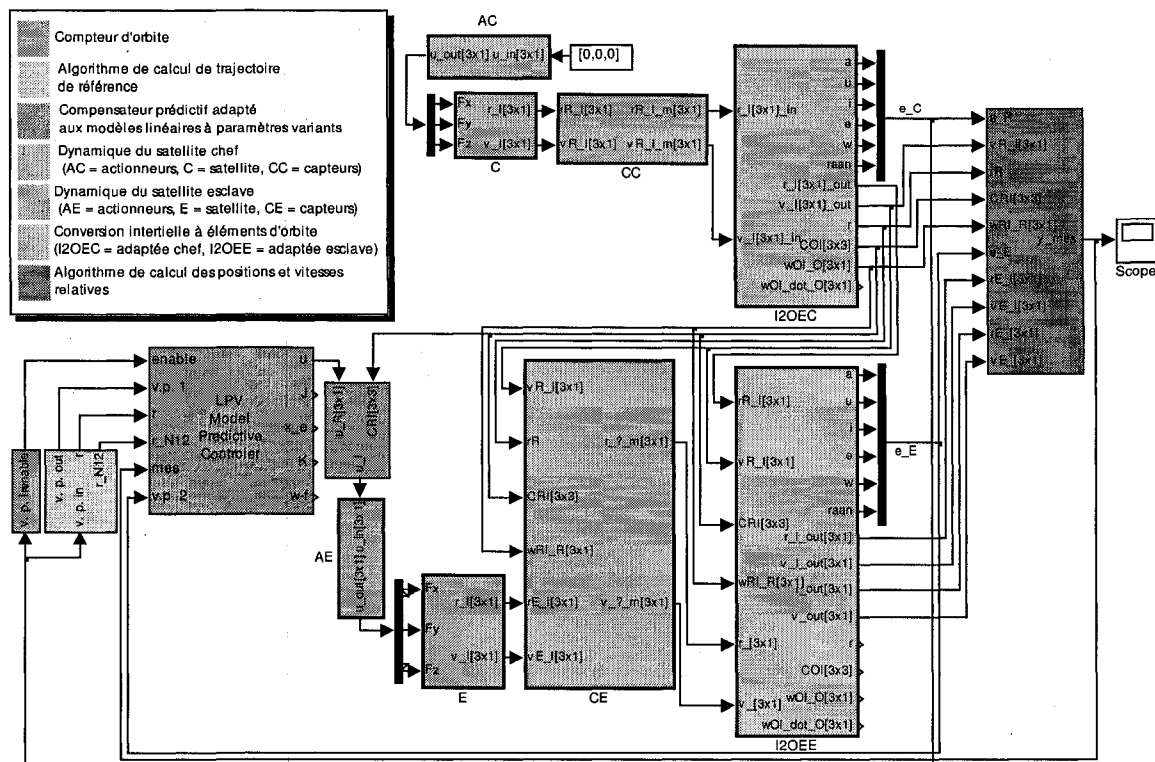


Figure 9.1 : Simulateur non linéaire basé sur les architectures d'asservissement proposées au Chapitre 8

Celui-ci est adapté aux deux architectures présentées dans le Chapitre 8, c'est-à-dire celle qui fait intervenir les coordonnées cartésiennes et celle qui utilise les éléments d'orbite. En fait, de simples variables drapeaux déterminent le scénario à simuler. Le simulateur est divisé en sept parties décrites dans les paragraphes qui suivent :

Premièrement, le compteur d'orbite, représenté par un bloc orange, analyse l'anomalie vraie du satellite chef pour déterminer le nombre d'orbite effectué par la formation depuis le début de la formation. Ce bloc configurable peut être utilisé pour activer le compensateur à un endroit précis sur l'orbite.

Deuxièmement, l'algorithme de génération de la trajectoire de référence, décrite à la Section 8.1, est représenté par la boîte jaune. En fait, selon le scénario, la trajectoire correspond aux états relatifs futurs désirés exprimés en coordonnée de Hill ou par éléments d'orbite.

Troisièmement, les blocs magenta représentent les compensateurs prédictifs développés à la Section 8.2. Ceux-ci utilisent les états relatifs de la formation et les éléments d'orbite du satellite chef et esclave. Selon le scénario choisi, l'équation de prédiction est obtenue à partir du modèle de Lawden ou GVE linéarisées. De plus, lorsque la loi de commande prédictive basée sur le modèle de Lawden est sélectionnée, la simulation peut être configurée pour que seulement la position relative soit mesurée, la vitesse pouvant être observée par le filtre de Kalman. La commande calculée par le compensateur, exprimée dans le repère de Hill, est transformée de manière à ce qu'elle soit exprimée dans le repère inertiel avant d'être dirigée vers les actionneurs du satellite esclave selon l'hypothèse formulée au Chapitre 8. Pour ce faire, il suffit de multiplier le vecteur de commande par la matrice C_{IO} , définie à l'équation (2.1). Dans le simulateur, cette matrice est calculée par un algorithme décrit plus bas.

Les blocs bleus et verts implémentent respectivement la dynamique des satellites chef et esclave. Celles-ci comprennent la dynamique orbitale, la modélisation des actionneurs et des capteurs. La dynamique orbitale du simulateur utilisé est exprimée dans le repère inertiel et inclut les perturbations orbitales J_2 . Pour l'obtenir, il suffit de prendre le produit $\vec{\mathfrak{S}}_I \cdot ()$ de l'équation (2.7), de manière à obtenir l'équation suivante :

$$\mathbf{r}^I = \frac{\mu}{r^3} \mathbf{r}^I + \mathbf{f}_p^I \quad (9.1)$$

où $\mathbf{r}^I = [r_x \ r_y \ r_z]^T$ correspond aux composantes inertielles du vecteur position du satellite et \mathbf{f}_p^I sont les accélérations de perturbations incluant le vecteur de commande ainsi que les perturbations J_2 , comme le montre l'équation qui suit :

$$\mathbf{f}_p^I = \frac{\mu}{r^3} \begin{bmatrix} -\frac{3}{2}J_2 \left(\frac{r_e}{r}\right)^2 \left(\frac{5z^2}{r^2} - 1\right) \\ -\frac{3}{2}J_2 \left(\frac{r_e}{r}\right)^2 \left(\frac{5z^2}{r^2} - 1\right) \\ \frac{3}{2}J_2 \left(\frac{r_e}{r}\right)^3 \left(3 - \frac{5z^2}{r^2}\right) \end{bmatrix} + \frac{1}{m} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} \quad (9.2)$$

où $J_2 = 1082.64 \times 10^{-6}$. Cette dynamique est implémentée dans MATLAB® en utilisant une stratégie schéma bloc intégrateur. Pour lancer la simulation, il est nécessaire de spécifier la position et la vitesse inertielles initiales du satellite chef et esclave aux intégrateurs. Ces conditions initiales doivent être évaluées à partir de la configuration initiale de la formation décrite par les éléments d'orbite du satellite chef ainsi que par la position et vitesse relatives initiales du satellite esclave exprimées dans le repère de Hill. Pour passer de cette représentation à l'autre, il faut calculer la position et la vitesse inertielles du satellite chef à partir de ses éléments d'orbite en utilisant l'Algorithme 9.1.

1. Calculer le semi-latus rectum et le rayon de l'orbite, introduits respectivement aux équations (2.22) et (2.19), en utilisant les éléments d'orbite du satellite et les équations définies ci-dessous :

$$p = a(1 - e^2) \quad (9.3)$$

$$r = \frac{p}{(1 + e \cos(u - \omega))} \quad (9.4)$$

2. Évaluer les composantes du vecteur position et vitesse du satellite exprimées dans $\vec{\mathcal{S}}_O$, notées \mathbf{r}^O et \mathbf{v}^O en appliquant les équations suivantes :

$$\mathbf{r}^O = [r \ 0 \ 0]^T \quad (9.5)$$

$$\mathbf{v}^O = \sqrt{\frac{\mu}{p}} [e \sin(u - \omega) \ 1 + e \cos(u - \omega) \ 0]^T \quad (9.6)$$

Ces équations ont été démontrées à la Section 2.2.

3. Utiliser la matrice de rotation \mathbf{C}_{OI} de l'équation (2.1) pour obtenir \mathbf{r}^I et $\dot{\mathbf{r}}^I$ à partir de \mathbf{r}^O et \mathbf{v}^O .
4. Fin de l'algorithme.

Algorithme 9.1 : Calcul de la position et vitesse inertielles à partir de ses éléments d'orbite

Par la suite, il reste à utiliser l'Algorithme 8.3 pour obtenir la position et vitesse inertielles du satellite esclave. Les actionneurs des satellites sont représentés simplement par un gain statique unitaire. En fait, l'étude des actionneurs d'un satellite ne fait pas partie de ce projet de recherche. Par contre, la simulation peut être configurée pour inclure du bruit blanc sur la commande avec une variance déterminée par l'utilisateur de manière à représenter les perturbations orbitales non modélisables. Les capteurs des satellites chef et esclave sont modélisés différemment. Le capteur du satellite chef fournit directement sa position et sa vitesse inertielles en incluant, si désiré, du bruit blanc. Il représente les mesures prises par un GPS embarqué dans le satellite chef. Le capteur du satellite

esclave fournit sa vitesse et sa position relatives. Ces mesures, pouvant inclure du bruit blanc, représentent celles effectuées par un LIDAR. Dans le simulateur, elles sont obtenues en transformant le vecteur \mathbf{r}_e^I et $\dot{\mathbf{r}}_e^I$ dans le repère de Hill en utilisant l'Algorithme 9.2.

1. Faire les étapes 1-2-3 de l'Algorithme 8.3.
2. Utiliser la matrice de rotation \mathbf{C}_{OI} de l'équation (2.1) pour obtenir ω_{OI}^I à partir de ω_{OI}^O .
3. Calculer la position et la vitesse relatives du satellite esclave dans le repère de Hill partir des équations (2.5) et (2.6) :

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^H &= \mathbf{C}_{OI}(\mathbf{r}_e^I - \mathbf{r}_c^I) \\ \dot{\mathbf{d}}^H &= \mathbf{C}_{OI}(\dot{\mathbf{r}}_e^I - \dot{\mathbf{r}}_c^I - (\omega_{OI}^I)^\times \mathbf{r}_e^I) \end{aligned} \quad (9.7)$$
4. Fin de l'algorithme.

Algorithme 9.2 : Calcul de la position et vitesse relatives du satellite esclave dans le repère de Hill à partir de la position et la vitesse inertielles des satellites chef et esclave

Quatrièmement, les blocs cyans implémentent l'Algorithme 8.1 de manière à obtenir les éléments d'orbite du satellite chef et esclave. Il est à noter que les éléments d'orbite du satellite esclave sont utiles seulement pour le scénario qui fait intervenir le compensateur basé sur le modèle GVE linéarisées. De surcroît, pour le satellite chef, la matrice de rotation \mathbf{C}_{OI} et les composantes de la vitesse angulaire exprimées dans le repère orbital ω_{OI}^O sont calculées. Celles-ci sont utilisées par plusieurs blocs présentés précédemment.

Finalement, le bloc rouge sélectionne les mesures à diriger vers le compensateur selon le scénario de simulation choisi. En fait, lorsque le compensateur basé sur le modèle de Lawden est utilisé, les coordonnées relatives mesurées par le LIDAR définissent directement les sorties du bloc. Par contre, lorsque le compensateur basé sur le modèle de GVE linéarisées est employé, la différence des éléments d'orbite entre le satellite esclave et chef est utilisée comme rétroaction.

9.2. Résultats et analyse

Cette section présente plusieurs simulations qui mettent en œuvre les compensateurs développés dans le Chapitre 8 pour des manœuvres de reconfiguration et de maintien de formations naturelles et artificielles. Plus précisément, par ces simulations, l'auteur établit les bases de l'ajustement des compensateurs prédictifs avec contraintes pour le vol en formation. En effet, des études détaillées des effets de l'horizon de prédiction, de la technique de prédiction (Prédiction à paramètres Fixes (PF) ou Variant (PV) sur l'horizon), de l'excentricité de l'orbite et de la pondération des compensateurs sur les performances sont présentées. Pour montrer ces éléments, cette section est divisée en deux parties. La première concerne le compensateur basé sur le modèle de Lawden et la

deuxième présente les simulations effectuées avec compensateur basé sur le modèle GVE linéarisées.

Le tableau suivant résume les analyses qui ont été effectuées avec ces compensateurs :

Tableau 9.1 : Description des résultats et des analyses et présentés

Compensateurs	Analyses	Descriptions
Basé sur le modèle de Lawden	Analyse des poles	Les pôles discrets des compensateurs sont analysés selon la méthode prédiction utilisée, les matrices de pondération choisies et l'excentricité de l'orbite.
	Analyse de la performance des méthodes de prédictions	Les méthodes de Prédiction Fixe (PF) et Variate (PV) sur l'horizon (prédiction à paramètres variant) présentées au Chapitre 8 sont comparées l'une avec l'autre ainsi qu'avec une Prédiction qui considère que l'Orbite est Circulaire (POC) (prédiction à paramètres constants). Pour ce faire, ces trois méthodes de prédictions sont utilisées pour différentes simulations dans lesquelles l'excentricité de l'orbite et l'horizon de prédiction varient. Les sommes des erreurs relatives en position et en vitesse sont comparées lors de manœuvres effectuées sur des formations naturelles et artificielles.
	Analyse de l'efficacité de l'observateur d'état	L'efficacité de l'observateur d'état du compensateur prédictif est analysée en ajoutant du bruit dans les mesures des capteurs. En fait, la variance du bruit injectée dans les mesures est comparée à celle du bruit sur les états observés
	Analyse de la performance de l'algorithme de traitement des contraintes	L'algorithme d'optimisation proposé par l'auteur au Chapitre 8 est introduit au compensateur et comparé (en analysant le coût lors d'une manœuvre) à une méthode d'optimisation quadratique optimale (donne la solution optimale globale) et à une simple saturation des actionnaires (donne la solution optimale locale).
	Analyse de la performance du compensateur	Les positions, les vitesses et les erreurs relatives ainsi que l'amplitude des commandes obtenues avec le compensateur prédictif sont analysées pour différentes manœuvres sur des formations naturelles et artificielles évoluant sur des orbites d'excentricité différentes.
Basé sur le modèle de GVE linéarisées	Analyse de la performance des méthodes de prédictions	Les performances des méthodes de Prédiction Fixe (PF) et Variate (PV) sur l'horizon sont analysées.
	Analyse de la performance du compensateur	Les positions, les vitesses et les erreurs relatives ainsi que la différence des éléments d'orbite et l'amplitude des commandes obtenues avec le compensateur prédictif sont analysées pour différentes manœuvres sur des formations naturelles suelment évoluant sur des orbites d'excentricité différentes.

9.2.1. Compensateur basé sur le modèle de Lawden

Afin de mettre en contexte les résultats de simulation, il est nécessaire de fixer les paramètres des formations initiales, des formations désirées et du compensateur. En ce sens, les formations initiales sont naturelles, sur une orbite excentrique et définies au Tableau 9.2 et au Tableau 9.3.

Tableau 9.2 : Éléments d'orbite initiaux du satellite chef

Éléments d'orbite	Valeurs
a	2.4200×10^7 m
u_0	$\frac{5\pi}{4}$ rad
i	$\frac{\pi}{4}$ rad
e	$0.5, 0.7^*$ —
ω	$\frac{\pi}{4}$ rad
Ω	0 rad

* Ce paramètre varie selon la simulation

Tableau 9.3 : Positions et vitesses relatives initiales du satellite esclave (définies au périgée)

Hill	Valeurs
x_0	200 m
y_0	200 m
z_0	200 m
\dot{x}_0	0 m/s
\dot{y}_0	-3.8730×10^{-2} , -3.5916×10^{-2} m/s
\dot{z}_0	0 m/s

* La première valeur est utilisée avec une excentricité de 0.5 et la deuxième avec une excentricité de 0.7

Il est à noter que l'excentricité varie selon la simulation pour démontrer son influence sur les performances des compensateurs et que \dot{y} a été choisi pour éviter la dérive de la formation en boucle ouverte. Pour calculer cette vitesse, en négligeant l'effet de J_2 , il suffit d'utiliser la contrainte de l'équation (2.64). Ces paramètres sont utilisés pour initialiser le simulateur comme l'a expliqué la section précédente. Les formations désirées sont naturelles et artificielles selon la simulation, sur une orbite excentrique et définies au Tableau 9.4 et au Tableau 9.5.

Tableau 9.4 : Positions et vitesses relatives naturelles désirées du satellite esclave (définies au péricée)

Hill	Valeurs	
x_0	100	m
y_0	100	m
z_0	100	m
\dot{x}_0	0	m/s
\dot{y}_0	-1.9365×10^{-2}	m/s
	-1.7958×10^{-2}	
\dot{z}_0	0	m/s

La première valeur est utilisée avec une excentricité de 0.5 et la deuxième avec une excentricité de 0.7

Tableau 9.5 : Positions et vitesses relatives artificielles désirées du satellite esclave

Hill	Valeurs	
x_0	100	m
y_0	100	m
z_0	100	m
\dot{x}_0	0	m/s
\dot{y}_0	0	m/s
\dot{z}_0	0	m/s

Il est à noter que les éléments d'orbite du satellite chef des formations désirées sont les mêmes que ceux des formations initiales. Les paramètres du compensateur basé sur le modèle de Lawden utilisés sont donnés au Tableau 9.6.

Tableau 9.6 : Paramètres du compensateur prédictif linéaire à paramètres variant discret basé sur le modèle de Lawden

Paramètres	Valeurs	
m	250	kg
Q_{MPC}	I	m
R_{MPC}	$10^3 I, 10^4 I, 10^5 I^*$	—
Q_{KF}	I	—
R_{KF}	I	—
N_1	1	—
N_2, N_3	25, 50*	—
t_s	$2\pi/(500n)$	sec

Ce paramètre varie selon la simulation

La pondération R_{MPC} et les horizons N_2 et N_3 varient selon la simulation dans le but de démontrer leurs effets sur les performances.

Analyse des pôles

Les premières simulations effectuées permettent d'analyser la position des pôles en boucle fermée dans le domaine discret obtenue avec des compensateurs sans contrainte utilisant différents horizons de prédiction, différentes matrices de pondération, avec la technique de prédiction à

paramètres fixes ou variant sur l'horizon et sur des orbites de différentes excentricités. Les pôles sont calculés en fermant la boucle, comme l'explique la Section 4.4.2, sur les modèles locaux obtenus à chaque pas en temps. Cependant, il est important de comprendre que cette stratégie ne peut être utilisée formellement pour prouver la stabilité (ou l'instabilité) de la loi de commande. En fait, il est très difficile de le faire pour des lois de commandes qui varient dans le temps. Cependant, cette approche est tout de même révélatrice du comportement des compensateurs. Les résultats obtenus, sur une orbite, avec les compensateurs à PF sont montrés à la Figure 9.2 et à la Figure 9.3 et ceux obtenus avec les compensateurs à PV sont présentés à la Figure 9.4 et à la Figure 9.5,

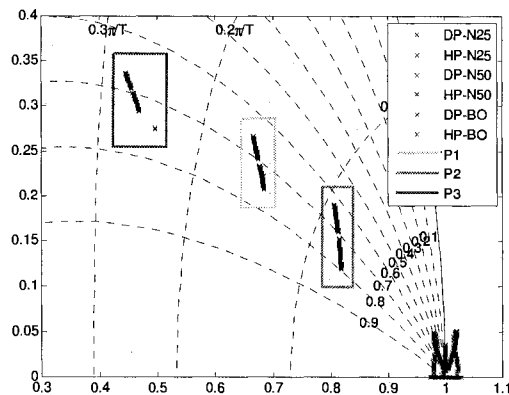


Figure 9.2 : Pôles en boucle ouverte et fermée (trois MPC à PF pondérés différemment) du modèle de Lawden avec $e = 0.5$

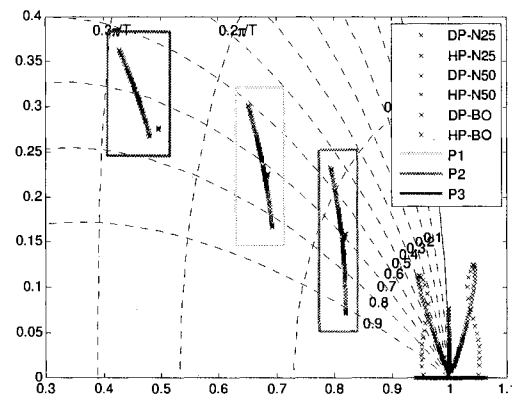


Figure 9.3 : Pôles en boucle ouverte et fermée (trois MPC à PF pondérés différemment) du modèle de Lawden avec $e = 0.7$

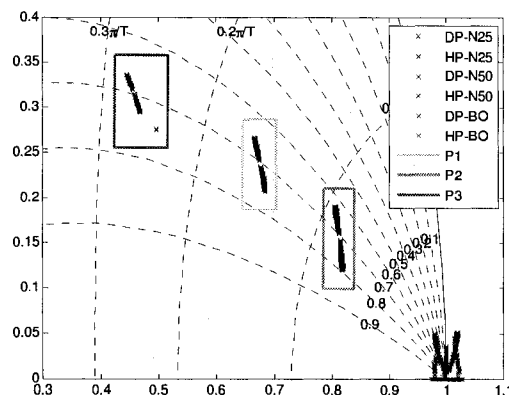


Figure 9.4 : Pôles en boucle ouverte et fermée (trois MPC à PV pondérés différemment) du modèle de Lawden avec $e = 0.5$

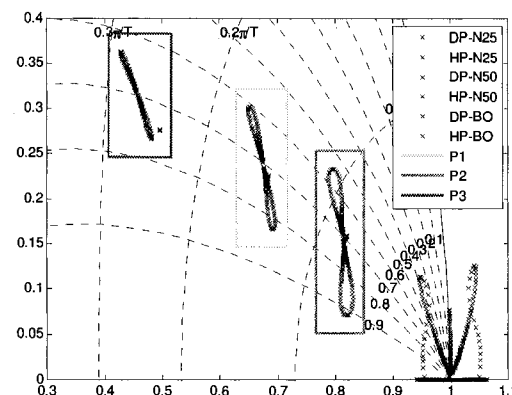


Figure 9.5 : Pôles en boucle ouverte et fermée (trois MPC à PV pondérés différemment) du modèle de Lawden avec $e = 0.7$

où DP correspond aux pôles dans le plan, HP correspond aux pôles hors du plan, $N25$ et $N50$ désignent l'horizon de prédiction utilisé, BO désigne les pôles en boucle ouverte du modèle de Lawden, $P1$, $P2$ et $P3$ désignent respectivement l'ensemble des pôles obtenus avec les

compensateurs pondérés selon R_{MPC} par 10^3I , 10^4I et 10^5I . Il est à noter que seulement la partie imaginaire positive de ces diagrammes des pôles est présentée étant donné que ceux-ci sont symétriques par rapport à l'axe réel. De plus, il est important de comprendre que la position des pôles varie, car l'anomalie vraie varie et non la loi de commande. Ces figures permettent de faire quelques remarques importantes :

- Tous les essais sont stables, car tous les pôles des systèmes compensés se retrouvent à l'intérieur du cercle unitaire. Il est important de remarquer que le système en boucle ouverte est instable.
- La dispersion des pôles en fonction de l'anomalie vraie est plus importante lorsque l'excentricité augmente, et ce, particulièrement pour le mouvement dans le plan.
- La pondération utilisée a un effet direct sur le temps de stabilisation sans changer l'amortissement qui se maintient autour de 0.7. Il est à noter que cette valeur est souvent considérée comme étant l'amortissement optimal pour un système asservi. Plus précisément, en augmentant la valeur de R_{MPC} l'effort de commande diminue, car la commande possède plus de poids dans la fonction coût. Cette économie de carburant se traduit évidemment par un temps de stabilisation plus long. En augmentant encore la valeur de cette pondération, le compensateur pourrait facilement devenir instable. La pondération qui semble la mieux adaptée est $P2$.
- L'augmentation de l'horizon de prédiction au-delà de 25 ne semble pas influencer sur les performances, et ce, autant avec les compensateurs utilisant la prédiction à paramètres fixes que variant sur l'horizon.
- Les prédictions à paramètres fixes (PF) et variant (PV) sur l'horizon offre une dispersion des pôles comparable lorsque l'excentricité et R_{MPC} sont faibles. Cependant, en augmentant ces paramètres, les différences s'accroissent. En effet, avec la prédiction à paramètres variant sur l'horizon les pôles deviennent plus étendus sur l'axe réel. En fait, le compensateur semble réagir plus intelligemment, car la dynamique du système en boucle fermée n'est pas symétrique selon l'axe semi-majeur de l'orbite. Cette observation semble contradictoire étant donné que le modèle de Lawden est symétrique par rapport à cet axe. Cependant, il est évident que pour demeurer optimale une loi de commande doit modifier son comportement dépendamment si la formation se dirige vers l'apogée ou vers le périogée. En fait, cette particularité est unique au compensateur prédictif.

Analyse de la performance des méthodes de prédiction

Il est intéressant de pousser plus loin l'analyse des performances des méthodes de prédiction à paramètres fixes et variant sur l'horizon. En lien avec ce qui précède, les prochains résultats de simulation permettent de comparer les erreurs relatives et l'effort de commande de ces deux types de compensateurs implémentant une loi de commande qui varie en fonction de l'anomalie. De surcroît, il est important de démontrer la nécessité de ces approches à paramètres variant, en comparant leurs performances avec une loi de commande prédictive à paramètre constant dans le temps basée sur le modèle de Hill. Cette dernière utilise donc une équation de Prédiction supposant que l'Orbite est Circulaire (POC). Ces trois compensateurs sont pondérés de la même manière, c'est-à-dire selon $P2$, et encore une fois aucune contrainte n'est imposée sur les entrées. L'excentricité de l'orbite de la formation et l'horizon de prédiction varient selon la simulation identifiée par un numéro. Les sommes, effectuées sur deux orbites, des erreurs relatives absolues en position et en vitesse ainsi que l'effort de commande obtenues lors de différentes manœuvres sur des formations naturelles sont montrés, pour le mouvement dans le plan, au Tableau 9.7 et, pour le mouvement hors du plan, au Tableau 9.8.

Tableau 9.7 : Effort de commande et somme des erreurs relatives absolues (en position et en vitesse) pour des manœuvres sur des formations naturelles effectuées par le MPC de Lawden (dans le plan)

Simulations	POC			PF			PV		
	$\sum u $ (N)	$\sum d - d^d $ (m)	$\sum \dot{d} - \dot{d}^d $ (m/s)	$\sum u $ (N)	$\sum d - d^d $ (m)	$\sum \dot{d} - \dot{d}^d $ (m/s)	$\sum u $ (N)	$\sum d - d^d $ (m)	$\sum \dot{d} - \dot{d}^d $ (m/s)
1 $e = 0.5$ $N = 25$	3.020×10^2	8.079×10^4	2.320×10^2	2.999×10^2	5.889×10^4	2.203×10^2	2.999×10^2	5.884×10^4	2.202×10^2
2 $e = 0.5$ $N = 50$	3.020×10^2	8.079×10^4	2.320×10^2	2.999×10^2	5.890×10^4	2.203×10^2	2.999×10^2	5.884×10^4	2.202×10^2
3 $e = 0.7$ $N = 25$	3.221×10^2	1.100×10^5	2.912×10^2	3.035×10^2	6.013×10^4	2.242×10^2	3.009×10^2	5.941×10^4	2.210×10^2
4 $e = 0.7$ $N = 50$	3.221×10^2	1.100×10^5	2.912×10^2	3.035×10^2	6.010×10^4	2.242×10^2	3.009×10^2	5.941×10^4	2.210×10^2

Tableau 9.8 : Effort de commande et somme des erreurs relatives absolues (en position et en vitesse) pour des manœuvres sur des formations naturelles effectuées par le MPC de Lawden (hors du plan)

Simulations	POC			PF			PV		
	$\sum u $ (N)	$\sum d - d^d $ (m)	$\sum \dot{d} - \dot{d}^d $ (m/s)	$\sum u $ (N)	$\sum d - d^d $ (m)	$\sum \dot{d} - \dot{d}^d $ (m/s)	$\sum u $ (N)	$\sum d - d^d $ (m)	$\sum \dot{d} - \dot{d}^d $ (m/s)
1 $e = 0.5$ $N = 25$	1.410×10^2	3.500×10^4	1.090×10^2	$1.41.0 \times 10^2$	3.0880×10^4	1.077×10^2	1.410×10^2	3.088×10^4	1.077×10^2
2 $e = 0.5$ $N = 50$	1.410×10^2	3.500×10^4	1.090×10^2	$1.41.0 \times 10^2$	3.0880×10^4	1.077×10^2	1.410×10^2	3.088×10^4	1.077×10^2
3 $e = 0.7$ $N = 25$	1.420×10^2	3.636×10^4	1.111×10^2	$1.41.2 \times 10^2$	3.0940×10^4	1.081×10^2	1.412×10^2	3.094×10^4	1.081×10^2
4 $e = 0.7$ $N = 50$	1.420×10^2	3.636×10^4	1.111×10^2	$1.41.2 \times 10^2$	3.0940×10^4	1.081×10^2	1.412×10^2	3.094×10^4	1.081×10^2

Les sommes, effectuées pour chaque pas en temps, des erreurs absolues en position et en vitesse ainsi que de l'effort de commande des manœuvres précédentes sont présentées à la Figure 9.6, à la Figure 9.7, à la Figure 9.8 et à la Figure 9.9. Il est à noter que certaines de ces figures présentent un

plus petit graphique superposé sur un plus grand. Celui-ci est un agrandissement d'une zone d'intérêt mis en évidence par un encadré noir. De plus, seulement les lois de commande avec un horizon de prédiction de 25 ont été utilisées pour obtenir ces figures étant donné que les performances obtenues avec cet horizon et un horizon de prédiction de 50 sont quasi-identiques.

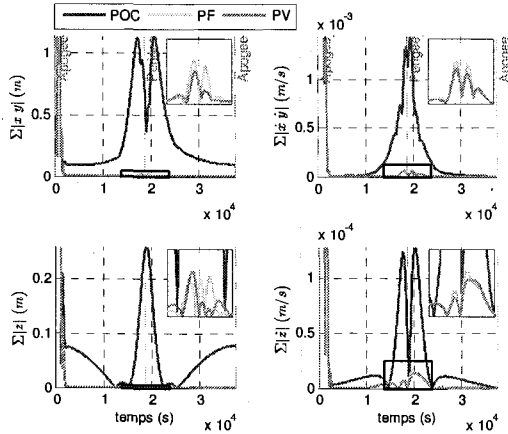


Figure 9.6 : Somme des erreurs relatives absolues pour la simulation 1 avec le MPC de Lawden à POC, PF et PV

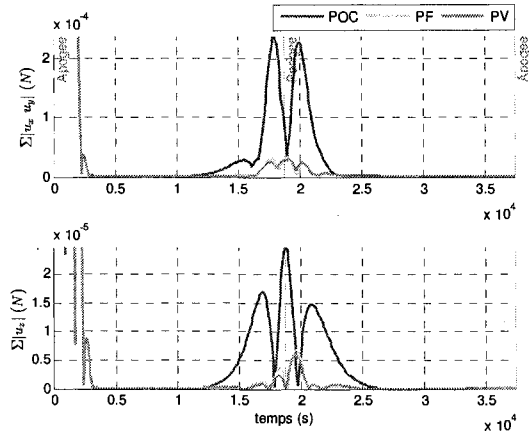


Figure 9.7 : Somme des commandes absolues pour la simulation 1 avec le MPC de Lawden à POC, PF et PV

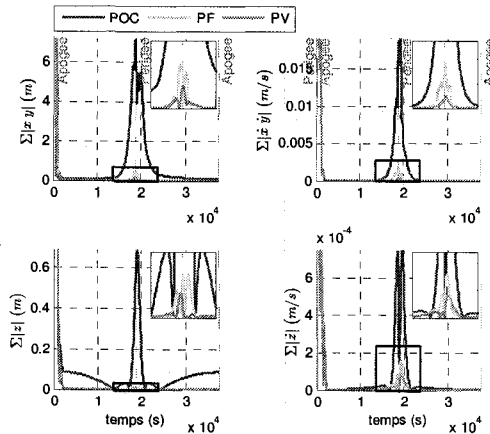


Figure 9.8 : Somme des erreurs relatives absolues pour la simulation 3 avec le MPC de Lawden à POC, PF et PV

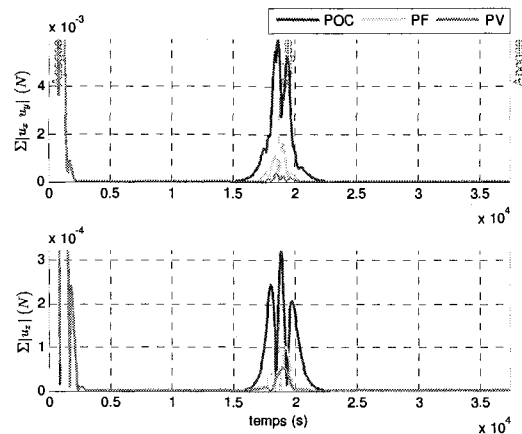


Figure 9.9 : Somme des commandes absolues pour la simulation 3 avec le MPC de Lawden à POC, PF et PV

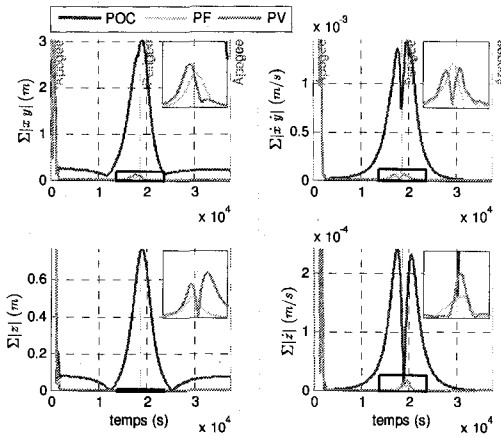
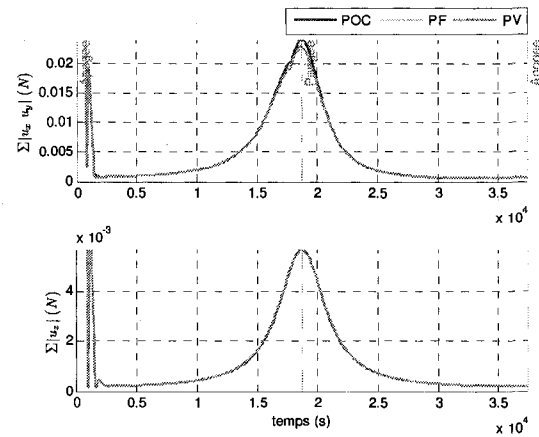
Les résultats pour les manœuvres sur des formations artificielles, obtenus avec les mêmes compensateurs, sont présentés au Tableau 9.9, au Tableau 9.10, à la Figure 9.10, à la Figure 9.11, à la Figure 9.12 et à la Figure 9.13.

Tableau 9.9 : Effort de commande et somme des erreurs relatives absolues (en position et en vitesse) pour des manœuvres sur des formations artificielles effectuées par le MPC de Lawden (dans le plan)

Simulations	POC			PF			PV		
	$\sum u $ (N)	$\sum d - d^d $ (m)	$\sum \dot{d} - \dot{d}^d $ (m/s)	$\sum u $ (N)	$\sum d - d^d $ (m)	$\sum \dot{d} - \dot{d}^d $ (m/s)	$\sum u $ (N)	$\sum d - d^d $ (m)	$\sum \dot{d} - \dot{d}^d $ (m/s)
5 $e = 0.5$ $N = 25$	6.133×10^2	1.000×10^5	2.377×10^2	6.060×10^2	5.899×10^4	2.209×10^2	6.059×10^2	5.909×10^4	2.210×10^2
6 $e = 0.5$ $N = 50$	6.133×10^2	1.000×10^5	2.377×10^2	6.060×10^2	5.899×10^4	2.209×10^2	6.059×10^2	5.909×10^4	2.210×10^2
7 $e = 0.7$ $N = 25$	9.889×10^2	1.593×10^5	3.244×10^2	9.105×10^2	6.255×10^4	2.263×10^2	9.056×10^2	6.451×10^4	2.331×10^2
8 $e = 0.7$ $N = 50$	9.889×10^2	1.593×10^5	3.244×10^2	9.105×10^2	6.257×10^4	2.263×10^2	9.056×10^2	6.453×10^4	2.331×10^2

Tableau 9.10 : Effort de commande et somme des erreurs relatives absolues (en position et en vitesse) pour des manœuvres sur des formations artificielles effectuées par le MPC de Lawden (hors du plan)

Simulations	POC			PF			PV		
	$\sum u $ (N)	$\sum d - d^d $ (m)	$\sum \dot{d} - \dot{d}^d $ (m/s)	$\sum u $ (N)	$\sum d - d^d $ (m)	$\sum \dot{d} - \dot{d}^d $ (m/s)	$\sum u $ (N)	$\sum d - d^d $ (m)	$\sum \dot{d} - \dot{d}^d $ (m/s)
5 $e = 0.5$ $N = 25$	2.213×10^2	4.113×10^4	1.108×10^2	2.218×10^2	3.087×10^4	1.076×10^2	2.218×10^2	3.087×10^4	1.076×10^2
6 $e = 0.5$ $N = 50$	2.213×10^2	4.113×10^4	1.108×10^2	2.218×10^2	3.088×10^4	1.076×10^2	2.218×10^2	3.088×10^4	1.076×10^2
7 $e = 0.7$ $N = 25$	2.823×10^2	5.251×10^4	1.231×10^2	2.853×10^2	3.104×10^4	1.079×10^2	2.853×10^2	3.104×10^4	1.079×10^2
8 $e = 0.7$ $N = 50$	2.823×10^2	5.250×10^4	1.231×10^2	2.853×10^2	3.105×10^4	1.079×10^2	2.853×10^2	3.105×10^4	1.079×10^2

**Figure 9.10 :** Somme des erreurs relatives absolues (en position et en vitesse) pour la simulation 5 avec le MPC de Lawden à POC, PF et PV**Figure 9.11 :** Somme des commandes absolues (en position et en vitesse) pour la simulation 5 avec le MPC de Lawden à POC, PF et PV

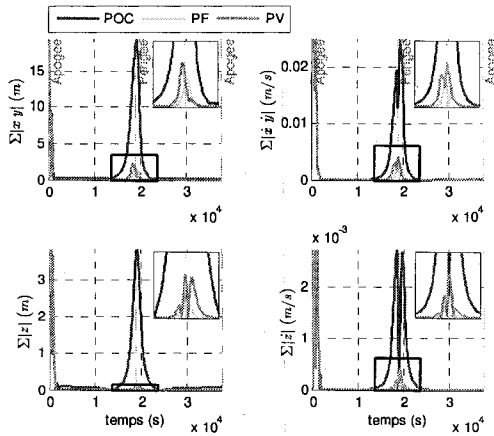


Figure 9.12 : Somme des erreurs relatives absolues (en position et en vitesse) pour la simulation 7 avec le MPC de Lawden à POC, PF et PV

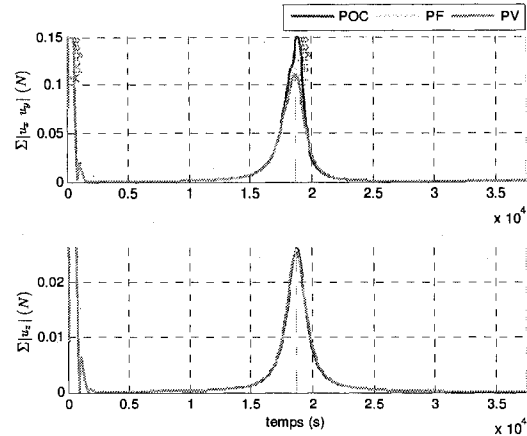


Figure 9.13 : Somme des commandes absolues (en position et en vitesse) pour la simulation 7 avec le MPC de Lawden à POC, PF et PV

Ces tableaux et figures permettent de tirer plusieurs conclusions qui sont des contributions originales dans le domaine des lois de commande prédictives appliquées sur les formations de satellites :

- L'utilisation d'un horizon de prédiction de 50 par rapport à 25 est inutile. Ceci confirme ce qui avait été envisagé lors de l'analyse des pôles. Cela augmente grandement la quantité de calcul requis sans améliorer les performances, et ce, peu importe le compensateur utilisé et l'excentricité de l'orbite.
- Les lois de commande variant en fonction de l'anomalie vraie (PF et PV) sont nécessaires. En effet, celles-ci offrent des performances de beaucoup supérieures aux lois de commande à paramètres constants (POC). En fait, la somme de l'erreur est beaucoup moins élevée pour un effort de commande moindre. La vie utile de la formation peut donc être allongée et la précision des mesures scientifiques est accrue. Ces différences de performances sont plus marquées pour le mouvement dans le plan et lors des manœuvres sur des formations artificielles.
- Les différences de performance des compensateurs utilisant une méthode de prédiction à paramètres fixes et variant sur l'horizon sont moins évidentes. En fait, dans tous les cas le compensateur utilisant la prédiction à paramètres variant sur l'horizon est au moins aussi performant que le compensateur utilisant une prédiction à paramètres fixes sur l'horizon. En fait, lors des manœuvres sur une formation artificielle les performances sont équivalentes (noter que lorsque l'orbite a une excentricité de 0.7, la prédiction à paramètre fixe sur l'horizon présente une erreur plus grande, mais l'effort de commande est plus petit).

Cependant, il semble qu'il est légèrement plus avantageux d'utiliser le compensateur à PV lors des manœuvres impliquant des formations naturelles.

- Les différences de performance entre les trois types de compensateur sont plus évidentes aux environs du périgée, car c'est dans cette zone où la dynamique de la formation varie le plus rapidement.

Analyse de l'efficacité de l'observateur d'état

Par la suite, il est possible de vérifier l'efficacité de l'observateur en ajoutant, seulement pour ces essais, du bruit blanc Gaussien dans les modèles des capteurs. De cette manière, il est possible de calculer la déviation standard des états relatifs obtenus sans et avec l'observateur, voir le Tableau 9.11.

Simulations	Formations	PF sans observateur		PF avec observateur		PV sans observateur		PV avec observateur	
		σ position (m)	σ vitesse (m/s)	σ position (m)	σ vitesse (m/s)	σ position (m)	σ vitesse (m/s)	σ position (m)	σ vitesse (m/s)
1 $e = 0.5$ $N = 25$	Naturelle	1.073×10^{-2}	4.808×10^{-4}	7.171×10^{-3}	6.448×10^{-7}	9.795×10^{-3}	5.110×10^{-4}	6.573×10^{-3}	5.839×10^{-7}
3 $e = 0.7$ $N = 25$	Naturelle	1.073×10^{-2}	4.849×10^{-4}	7.262×10^{-3}	6.255×10^{-7}	1.079×10^{-2}	5.036×10^{-4}	7.407×10^{-3}	6.329×10^{-7}
5 $e = 0.5$ $N = 25$	Artificielle	1.063×10^{-2}	5.154×10^{-4}	7.312×10^{-3}	6.091×10^{-7}	1.012×10^{-2}	4.842×10^{-4}	6.800×10^{-3}	5.859×10^{-7}
7 $e = 0.7$ $N = 25$	Artificielle	1.196×10^{-2}	4.752×10^{-4}	8.580×10^{-3}	6.335×10^{-7}	1.242×10^{-2}	5.095×10^{-4}	9.164×10^{-3}	6.403×10^{-7}

Ces résultats montrent que l'écart-type du bruit est nettement diminué par l'observateur. Cependant, l'effet est beaucoup plus marqué sur les vitesses relatives.

Analyse de la performance de l'algorithme de traitement des contraintes

Il reste maintenant à ajouter l'algorithme de traitement de contraintes d'entrées (Algorithme 8.5), à l'optimiseur. Cependant, il faut prendre conscience de certaines particularités reliées aux lois de commande prédictives proposées pour maintenir leur stabilité et leurs performances, malgré l'utilisation de propulseur à poussée limitée. En lien avec ce qui précède, il a été mentionné dans les chapitres précédents que les lois de commandes prédictives définissent la séquence de commandes futures du satellite esclave, mais que seulement la commande $u(k|k)$ est utilisée. Par conséquent, il est intéressant de comparer cette séquence de commandes définie au temps k pour tout l'horizon de prédiction avec les commandes réellement dirigées aux actionneurs au temps $k + l$ pour $l = 1 \dots N_2$ aux environs du périgée, c'est-à-dire l'endroit de l'orbite où les différences entre $u(k + l|k)$ et $u(k + l|k + l)$ pour $l = 1 \dots 25$ sont susceptibles d'être les plus grandes. La Figure 9.14, la Figure 9.15, la Figure 9.16 et la Figure 9.17 montrent les résultats de ces comparaisons pour les compensateurs prédictifs à PF et à PV pour les simulations 1, 3, 5 et 7.

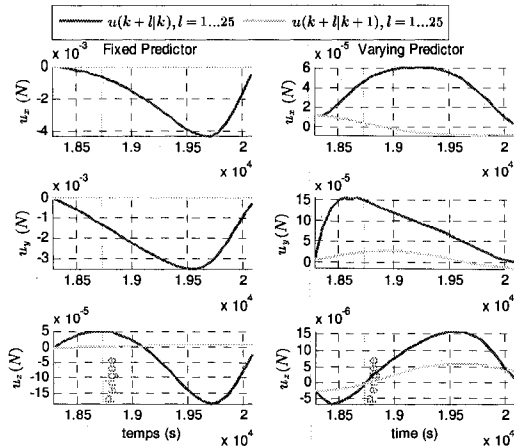


Figure 9.14 : Comparaison de $u(k+l|k)$ avec $u(k+l|k+1)$ pour $l = 1...25$ aux environs du périégée pour la simulation 1 avec le MPC de Lawden à PF et PV

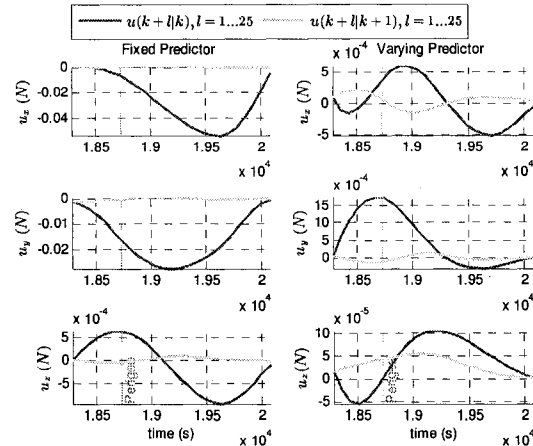


Figure 9.15 : Comparaison de $u(k+l|k)$ avec $u(k+l|k+1)$ pour $l = 1...25$ aux environs du périégée pour la simulation 3 avec le MPC de Lawden à PF et PV

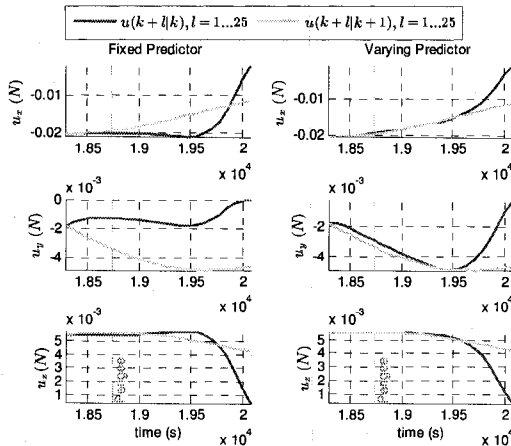


Figure 9.16 : Comparaison de $u(k+l|k)$ avec $u(k+l|k+1)$ pour $l = 1...25$ aux environs du périégée pour la simulation 5 avec le MPC de Lawden à PF et PV

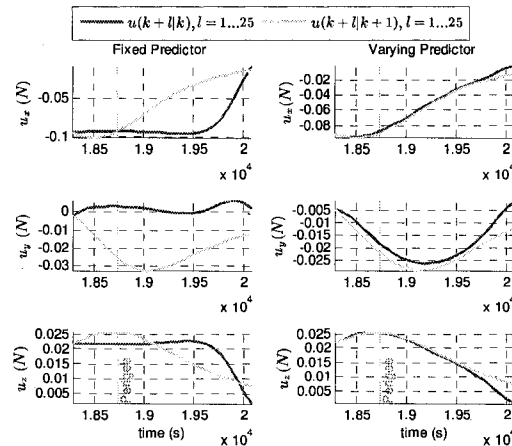


Figure 9.17 : Comparaison de $u(k+l|k)$ avec $u(k+l|k+1)$ pour $l = 1...25$ aux environs du périégée pour la simulation 7 avec le MPC de Lawden à PF et PV

Voici les informations importantes que ces résultats apportent :

- La séquence de commande prédite par le compensateur prédictif à PV est beaucoup plus près de la commande réellement envoyée aux actionneurs que celle obtenue avec le compensateur prédictif à PF. Sans contrainte sur la force maximum allouée par les actionneurs, cette réalité ne semble pas se traduire par une différence significative des performances étant donné que le temps de stabilisation, les erreurs relatives et l'effort de commande sont semblables pour les deux approches. Par contre, avec des contraintes d'entrées, ceci cause un problème majeur et particulièrement lors de la simulation 3, c'est-à-dire lors des manœuvres avec une formation naturelle sur une orbite très excentrique. En fait, la Figure 9.15 montre que près du périégée, le prédicteur à paramètres fixes sur l'horizon prévoit que la commande dépassera bientôt la

poussée limite des propulseurs. Cependant, étant donné que la dynamique change rapidement à cet endroit de l'orbite, le compensateur prédictif sans contrainte corrigera cette prédiction dans les prochaines itérations et la commande réellement appliquée sur le satellite esclave sera très faible. Par contre, le compensateur utilisant la prédiction à paramètres fixes (PF) sur l'horizon avec contraintes convergerait vers une commande qui tendra à agir fortement et rapidement pour éviter la saturation éventuelle des actionneurs. Cet effort de commande inutile et d'amplitude considérable contribuera malheureusement à briser la cohésion de la formation et pourra même mener à l'instabilité, car le phénomène est amplifié d'échantillon en échantillon. Ceci a été confirmé en simulation par l'auteur. Bref, dans cette situation bien particulière, il est plus avantageux d'utiliser le compensateur utilisant la prédiction à paramètres variant sur l'horizon ou simplement de n'imposer aucune contrainte sur les actionneurs aux environs du périégée sachant que l'effort requis pour maintenir une formation naturelle est très petite, car le compensateur lutte seulement contre les perturbations orbitales et les légères erreurs entre la trajectoire de référence du mouvement naturel (basé sur un modèle linéaire) d'une formation et mouvement naturel exacte.

- La Figure 9.17 indique que la cohésion d'une formation artificielle sur une orbite d'excentricité de 0.7 ne peut être maintenue lors du passage au périégée avec des actionneurs fournissant une poussée aussi faible que 30×10^{-3} Newton. En fait, à cet endroit de l'orbite, l'utilisation des compensateurs devrait être évitée de manière à laisser la cohésion de la formation se défaire naturellement. Ceci éviterait de consommer du propergol inutilement et peut-être de rendre le système instable. La configuration de la formation artificielle pourrait par la suite être reprise ailleurs sur l'orbite dans le but de reprendre la prise de mesures scientifiques.

Considérant les commentaires précédents le traitement des contraintes a été intégré aux algorithmes de compensation utilisant la prédiction à paramètres fixes sur l'horizon pour les simulations 1 et 5 et utilisant la prédiction à paramètres variant sur l'horizon pour la simulation 3. Ces manœuvres ont été effectuées en utilisant trois techniques d'optimisation, dont celle proposée par l'auteur à la Section 8.2.4. L'objectif est de situer les performances de cette dernière par rapport à deux autres approches. La première technique, utilisée à titre de référence, est obtenue simplement en saturant la séquence de commandes. La solution obtenue, selon la littérature, correspond au minimum local de la fonction coût. Cette approche, très simple, offre des performances médiocres. Elle permet donc de définir la borne inférieure de performances au-dessus de laquelle un algorithme quasi-optimal devrait se trouver. La deuxième technique de référence fait intervenir les outils de programmation quadratique

de MATLAB®. En fait, la fonction « quadprog » permet d'obtenir la solution optimale globale de la fonction. Cette fonction a été utilisée pour faire la gestion des contraintes des compensateurs prédictifs appliqués sur la grue, voir la Section 7.2 et la Section 7.3. Les sommes des coûts reliées aux manœuvres effectuées avec cet algorithme servent de borne supérieure des performances. Le Tableau 9.12 présente les sommes des coûts obtenues lors des simulations.

Tableau 9.12 : Somme de la fonction coût optimale locale, quasi-optimale globale et optimale globale

Simulations	Méthodes de Prédiction	ΣJ		
		Optimale locale	Quasi-optimale globale	Optimale globale
1	$e = 0.5$ $N = 25$	PF	1.516×10^7	$1.530 \times 10^6^*$
3	$e = 0.7$ $N = 25$			
5	$e = 0.5$ $N = 25$	PV	1.493×10^7	$1.545 \times 10^6^*$
..		PF	1.433×10^7	$1.438 \times 10^6^{**}$

* L'optimisation a convergé avec une moyenne de 3.25 itérations

** L'optimisation a convergé avec une moyenne de 3.10 itérations

Ces résultats montrent que l'algorithme quasi-optimal proposé par l'auteur offre un coût d'environ 10 fois inférieur à celui obtenu avec l'approche par saturation et très près du coût optimal. De plus, l'algorithme est facile à implémenter et requiert en moyenne seulement 3.2 itérations de type Newton-Raphson. La performance de l'approche proposée par l'auteur est d'autant plus évidente en analysant la Figure 9.18, qui montre l'évolution, en fonction du temps, de la somme du coût lors de la simulation 1.

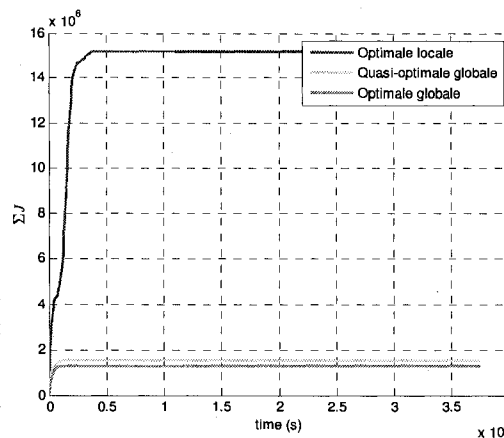


Figure 9.18 : Somme de la fonction coût optimale locale, quasi-optimale globale et optimale globale pour la simulation 1 avec le MPC de Lawden à PF

Des figures très semblables ont été obtenues pour les simulations 3 et 5, il n'est donc pas nécessaire de les présenter. En plus, de démontrer l'efficacité de la méthode d'optimisation proposée, cette figure montre que le temps pour atteindre la configuration désirée est presque le même que celui obtenu avec l'algorithme optimal, à savoir d'environ 1500 secondes, comparativement à 3500 secondes obtenu avec l'approche par saturation.

Analyse de la performance du compensateur

La performance de chacun des éléments de l'algorithme de compensation ayant été démontrée et optimisée selon les conditions d'opération, il est nécessaire de présenter les résultats détaillés, c'est-à-dire, les positions relatives par rapport à celles désirées, les erreurs relatives en position et en vitesse ainsi que l'effort de commande, obtenues avec simulations 1, 3 et 5. Ceux-ci pourront servir de référence pour d'autres techniques d'asservissement d'une formation de satellites utilisant une rétroaction des erreurs relatives exprimées dans le repère de Hill. Ce genre de résultat est à ce jour très difficile à trouver dans la littérature.

Comme mentionné dans les paragraphes précédents, la simulation 1 implique une manœuvre de reconfiguration suivie d'une manœuvre de maintien d'une formation naturelle sur une orbite de 0.5 d'excentricité. Plus précisément, la formation naturelle initiale est laissée en boucle ouverte pendant une orbite avant que le compensateur soit activé à l'apogée pour effectuer la reconfiguration. Cette nouvelle configuration est maintenue pendant une orbite supplémentaire en boucle fermée. Le compensateur prédictif avec contraintes utilise une méthode de prédiction à paramètres fixes sur l'horizon, assez performante avec ce type d'orbite. La Figure 9.19 présente le diagramme des phases des positions relatives du satellite esclave obtenu. Il est à noter qu'un diagramme des phases est une représentation multidimensionnelle de la valeur des états (qui varie en fonction du temps) d'un système dans son espace d'états. La Figure 9.20 montre l'erreur en position et en vitesse relatives et la Figure 9.21 montre les commandes fournies aux actionneurs du satellite esclave lors de la manœuvre.

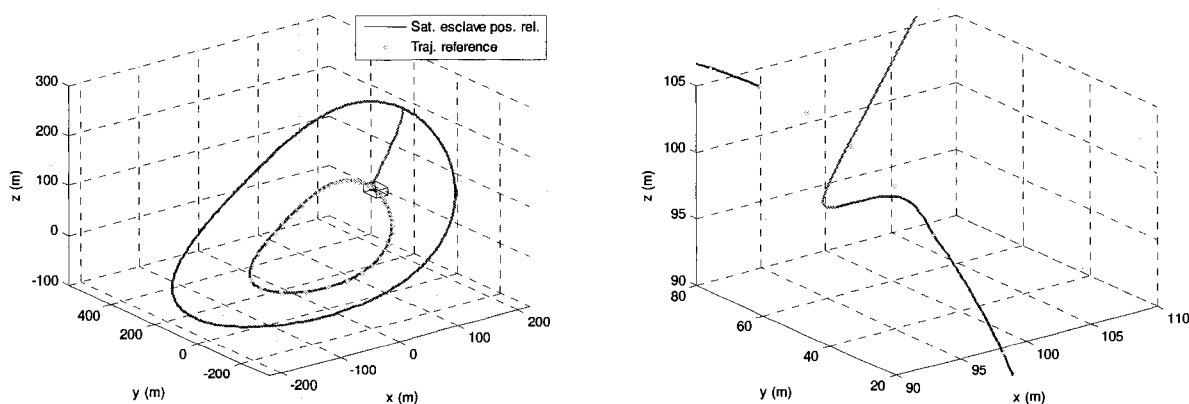


Figure 9.19 : Diagramme des phases en position obtenu de la simulation 1 avec le MPC de Lawden à PF

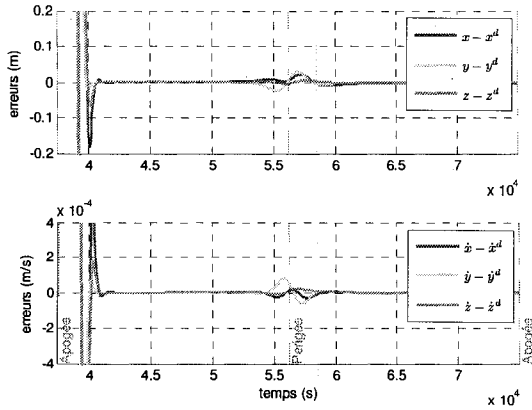


Figure 9.20 : Erreurs relatives cartésiennes obtenues de la simulation 1 avec le MPC de Lawden à PF

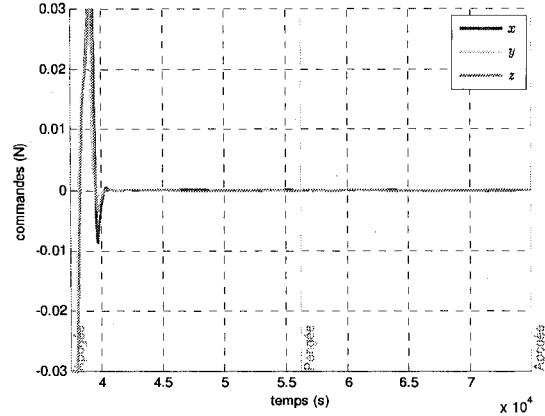


Figure 9.21 : Commandes obtenues de la simulation 1 avec le MPC de Lawden à PF

Il est à noter que la courbe de la Figure 9.19 varie graduellement du bleu au rouge selon l'intensité des commandes (bleu indique une commande presque nulle et rouge désigne un effort de commande maximal). Ces figures permettent de formuler quelques commentaires intéressants :

- La manœuvre de reconfiguration s'effectue en environ 2250 secondes et le dépassement maximum est aussi faible que 4 %.
- L'erreur durant le maintien de la formation naturelle désirée est très faible. En fait, les erreurs en position et en vitesse les plus grandes se situent aux environs du périégée. Les erreurs maximales de 2.99×10^{-2} m et de 8.04×10^{-5} m/s sont observées sur l'axe y. Ces erreurs reviennent périodiquement. Elles sont principalement dues aux différences entre le mouvement relatif non linéaire incluant J_2 et le modèle de Lawden servant à la fois pour effectuer la prédiction et pour générer la trajectoire de référence ainsi qu'aux erreurs de discrétisation (approximation de Padé de degré 1).
- La commande ne dépasse en aucun temps le maximum alloué par les actionneurs établi à 30×10^{-3} Newton. L'effort de commande est concentré à l'apogée lors de la reconfiguration. En fait, dans la phase de maintien de la formation, l'effort de commande est très faible. Le maximum observé est de 3.91×10^{-5} Newton, observé dans l'axe y près du périégée.

La Figure 9.22 présente le diagramme des phases, la Figure 9.23 montre l'erreur relative et la Figure 9.24 rapporte l'effort de commande obtenu lors de la simulation 3. Celle-ci implique une manœuvre de reconfiguration et de maintien d'une formation naturelle sur une orbite d'excentrique de 0.7 faisant intervenir un compensateur prédictif utilisant la prédiction à paramètres variant sur l'horizon.

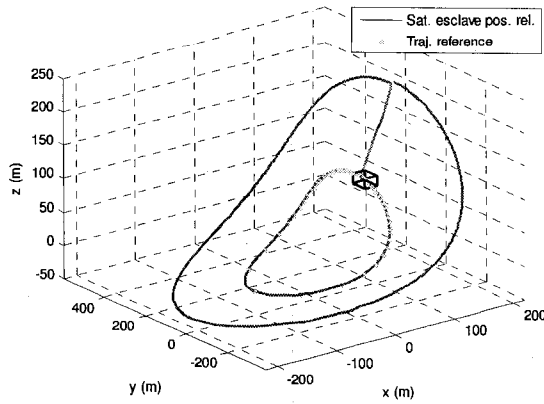


Figure 9.22 : Diagramme des phases en position obtenu de la simulation 3 avec le MPC de Lawden à PV

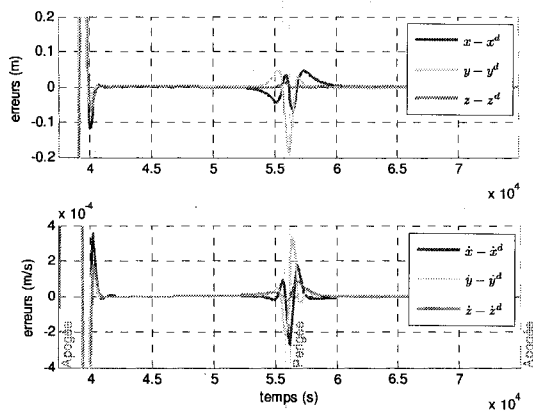
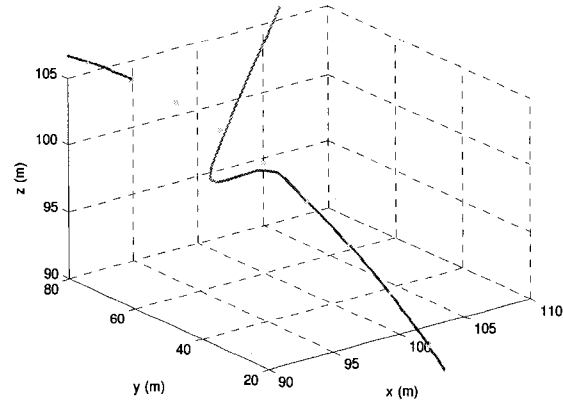


Figure 9.23 : Erreurs relatives catésiennes obtenues de la simulation 3 avec le MPC de Lawden à PV

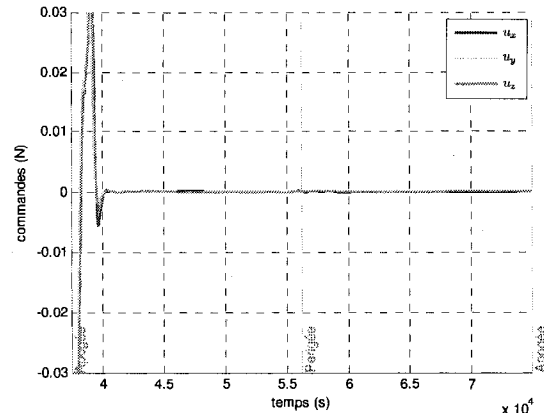


Figure 9.24 : Commandes obtenues de la simulation 3 avec le MPC de Lawden à PV

Les mêmes commentaires que pour la simulation 1 peuvent s'appliquer. Seulement les différences sont commentées :

- La manœuvre de reconfiguration s'effectue en environ 2150 secondes et le dépassement maximum est de 2.7 %.
- Lors du maintien de la formation, des erreurs maximales de 1.87×10^{-1} m et de 3.35×10^{-4} m/s sont observées sur l'axe y aux environs du périgée. Bien qu'utiliser une prédiction à paramètres variant sur l'horizon dans l'algorithme du compensateur contribue légèrement à améliorer les performances, il est normal d'obtenir des erreurs relatives plus élevées lors du maintien de la formation par rapport à celles obtenues avec la simulation 1, étant donné la plus grande excentricité de l'orbite.
- Dans la phase de maintien de la formation, l'effort de commande maximum observé est de 1.70×10^{-4} Newton dans l'axe y près du périgée.

Les derniers résultats présentés avec le compensateur prédictif basé sur modèle de Lawden ont été obtenus avec la simulation 5. Celle-ci consiste en une manœuvre de reconfiguration d'une formation naturelle en formation artificielle plus serrée. Cette formation est maintenue pendant un tour d'orbite. L'algorithme de prédiction utilisé est à paramètres fixes sur l'horizon. Les résultats obtenus sont montrés à la Figure 9.25, à la Figure 9.26 et à la Figure 9.27.

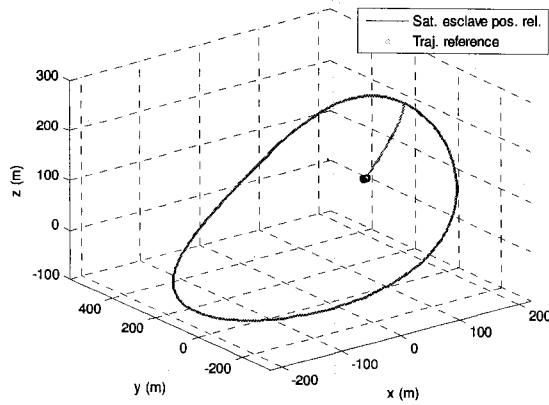


Figure 9.25 : Diagramme des phases en position obtenu de la simulation 5 avec le MPC de Lawden à PF

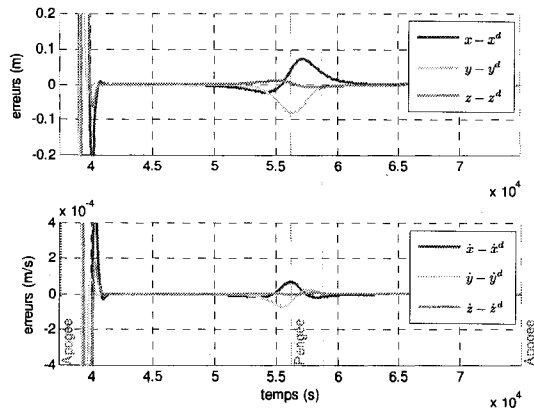


Figure 9.26 : Erreurs relatives cartésiennes obtenues de la simulation 5 avec le MPC de Lawden à PF

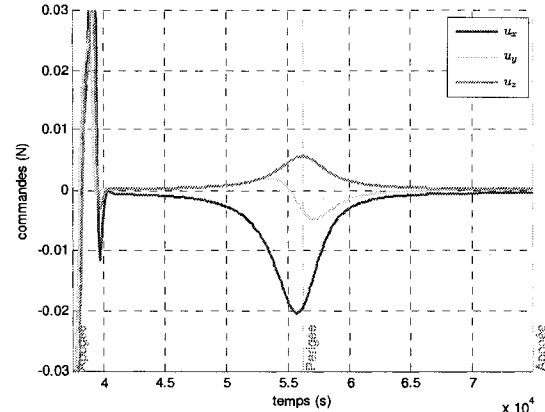


Figure 9.27 : Commandes obtenues de la simulation 5 avec le MPC de Lawden à PF

Ces figures permettent de formuler quelques commentaires importants :

- La manœuvre de reconfiguration s'effectue en environ 2300 secondes et le dépassement maximum est 5.3 %.
- L'ordre de grandeur de l'erreur relative obtenue est comparable à celui constaté avec une formation naturelle sur la même orbite. Plus précisément, des erreurs maximales de 7.22×10^{-2} m et de 6.81×10^{-4} m/s sont observées sur l'axe x aux environs du périgée.

- Contrairement aux formations naturelles, l'effort de commande nécessaire est aussi important lors de la reconfiguration que lors du maintien de la formation. En effet, la force maximale, selon l'axe x et très près du périégée, est d'une amplitude de 2.04×10^{-2} Newton.

9.2.2. Compensateur basé sur le modèle de GVE linéarisées

Les simulations menées avec le compensateur basé sur le modèle de GVE linéarisées impliquent seulement des manœuvres sur des formations naturelles. La formation initiale utilisée est encore une fois définie par les éléments d'orbite initiaux du satellite chef, montrés au Tableau 9.2, et les positions et les vitesses relatives initiales du satellite esclave sont présentées au Tableau 9.13.

Tableau 9.13 : Positions et vitesses relatives initiales du satellite esclave (définies au périégée)

Hill	Valeurs	
x_0	1500	m
y_0	1500	m
z_0	1500	m
\dot{x}_0	0	m/s
\dot{y}_0	-0.29047, -0.26937	m/s
\dot{z}_0	0	m/s

La première valeur est utilisée avec une excentricité de 0.5 et la deuxième avec une excentricité de 0.7

Il est à noter que la formation initiale choisie se situe sur la même orbite, mais elle est beaucoup plus étendue. Ce choix permet d'activer l'algorithme d'optimisation pour traiter les contraintes lors des manœuvres. La formation naturelle désirée a été définie au Tableau 9.4.

Aucune manœuvre pour atteindre une formation artificielle ne sera présentée. En effet, le temps de stabilisation des formations obtenues avec les compensateurs basées sur le modèle GVE linéarisées est relativement élevé et l'effort de commande est très faible. Ceci est très avantageux pour maintenir ou reconfigurer une formation naturelle sur plusieurs orbites. Cependant, cette approche s'applique difficilement aux formations artificielles. En effet, comme expliqué dans la Section 8.1, la consigne, en différence d'éléments d'orbite, varie pour ce genre de formation. Cette variation est beaucoup plus rapide que le temps de stabilisation qu'il est possible d'atteindre avec ces compensateurs prédictifs, et ce, peu importe les matrices de pondération utilisées. La Figure 9.28 montre la consigne en différences d'éléments d'orbite qui définit la formation artificielle dont les paramètres sont présentés au Tableau 9.5 sur une orbite d'excentricité de 0.5.

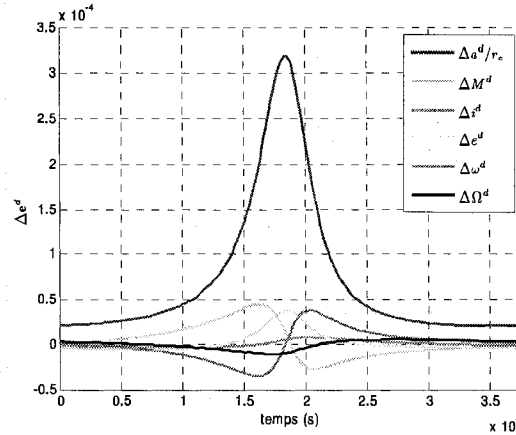


Figure 9.28 : Différence d'éléments d'orbite désirée pour la formation artificielle définie au Tableau 9.2 et au Tableau 9.5 sur une orbite d'excentricité de 0.5

D'ailleurs (Schaub et Junkins 2003) indique que les lois de commande basées sur les équations de variation de Gauss sont idéales pour corriger l'orbite d'un satellite de manière à ce que ce dernier suive une trajectoire orbitale désirée qui « coopère avec la nature ».

Les paramètres des compensateurs prédictifs utilisés pour les simulations sont montrés au Tableau 9.14.

Tableau 9.14 : Paramètres du compensateur prédictif linéaire à paramètres variant discret basé sur le modèle de GVE linéarisées

Paramètres	Valeurs	
m	250	kg
Q_{MPC}	I	m
R_{MPC}	$\text{diag}\left(\left[\frac{1}{r_e^2} \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ \dots\right]\right)$	—
Q_{KF}	$10^{-6}I$	—
R_{KF}	I	—
N_1	1	—
N_2, N_3	25, 50*	—
t_s	$2\pi/(150n)$	sec

* Ce paramètre varie selon la simulation

La matrice de pondération R_{MPC} a été choisie pour que les unités des éléments d'orbite soient normalisées. En fait, seulement les unités de l'axe semi-majeur doivent être normalisées par le carré du rayon de la Terre (le carré du facteur de normalisation est requis, car la fonction coût est quadratique). Cette pondération permet d'obtenir de très bonnes performances avec la méthode de prédiction à paramètres variant sur l'horizon. Cependant, elle n'est pas adaptée au compensateur utilisant la prédiction à paramètres fixes sur l'horizon. En fait, dans ce cas, il suffit d'augmenter la pondération de l'anomalie moyenne. Il est à noter que seulement les résultats obtenus avec des compensateurs utilisant la prédiction à paramètres variant sur l'horizon seront présentés. La période

d'échantillonnage peut être beaucoup plus longue avec ce modèle, car les éléments d'orbite changent beaucoup moins rapidement que la position et la vitesse relative. Cette augmentation fait que la prédiction couvre une plus grande partie de l'orbite et améliore grandement les performances. Cependant, t_s doit être suffisamment faible pour limiter les erreurs de discrétisation. Bref, il s'agit de trouver le meilleur compromis.

Analyse de la performance des méthodes de prédiction

Les premiers résultats de simulations visent à démontrer l'efficacité du compensateur basé sur le modèle GVE linéarisées utilisant la prédiction à paramètres variant sur l'horizon selon l'excentricité de l'orbite et l'horizon de prédiction. Pour ce faire, l'effort de commande, les sommes des erreurs absolues en position et en vitesse ainsi qu'en différence des éléments d'orbite sont comparés pour différentes simulations :

Tableau 9.15 : Effort de commande, sommes des erreurs relatives absolues (en position, en vitesse et en différence des éléments d'orbite) pour des manœuvres sur une formation naturelle effectuées par le compensateur prédictif de GVE linéarisées.

Simulations	PV			
	$\sum u $ (N)	$\sum d - d^d $ (m)	$\sum \dot{d} - \dot{d}^d $ (m/s)	$\sum \Delta e - \Delta e^d $ (-)
9 $e = 0.5$ $N = 25$	2.061×10^2	6.453×10^7	9.787×10^3	3.085
10 $e = 0.5$ $N = 50$	2.067×10^2	5.671×10^7	9.024×10^3	2.867
11 $e = 0.7$ $N = 25$	2.771×10^2	7.738×10^7	1.155×10^4	3.315
12 $e = 0.7$ $N = 50$	2.685×10^2	6.414×10^7	9.876×10^3	2.954

Il est à noter que ces essais sont réalisés sur quatre orbites sans considérer les contraintes sur les actionneurs. Ces résultats permettent de cerner certains aspects importants du comportement de ce compensateur :

- L'augmentation de l'horizon de prédiction améliore nettement les performances. Cette amélioration est d'autant plus marquée lorsque l'excentricité est élevée. Cette réalité, qui n'avait pas été observée avec le compensateur basé sur le modèle de Lawden, témoigne aussi de l'importance liée à l'utilisation d'une prédiction à paramètres variant sur l'horizon. Bref, cette loi de commande nécessite une prédiction lointaine pour constater les changements très lents des éléments d'orbite et très précise pour considérer leurs variations qui peut être aussi petites que 10^{-7} pour une formation serrée. Cependant, l'utilisation d'un horizon de prédiction de 25 est recommandé pour minimiser les calculs à chaque pas en temps.
- L'excentricité de l'orbite influe sur les performances de cette loi de commande. En fait, l'augmentation de l'excentricité de l'orbite augmente l'effort de commande et les sommes des

erreurs. Cependant, les différences de performances sont moins importantes comparativement à celles obtenues avec le compensateur basé sur modèle de Lawden en faisant varier ce paramètre.

Analyse de la performance du compensateur

Il est intéressant de montrer de manière plus précise le comportement du compensateur prédictif basé sur modèle de GVE linéarisées afin de le comparer avec celui basé sur le modèle de Lawden. Pour ce faire, le diagramme des phases, Figure 9.29, les erreurs relatives en position et en vitesse, Figure 9.30, les erreurs en différences d'éléments d'orbite, Figure 9.31, et les commandes en fonction du temps, Figure 9.32, sont présentés. Ces figures ont été obtenues lors de la simulation 9 qui propose d'utiliser un compensateur utilisant la prédiction à paramètres variant sur l'horizon et d'horizon de 25 pour une orbite de 0.5 d'excentricité. Il est à noter que l'algorithme de traitement des contraintes a aussi été intégré lors des prochaines simulations.

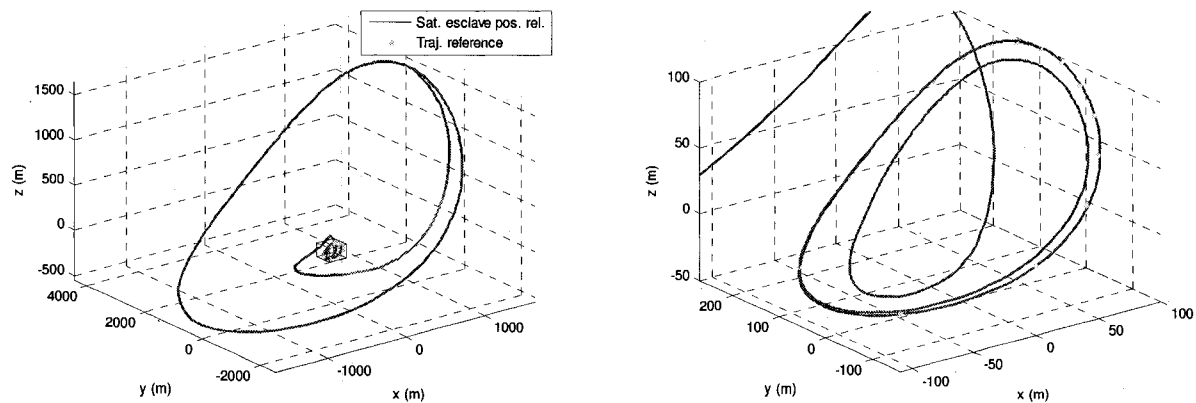


Figure 9.29 : Diagramme des phases en position obtenu de la simulation 9 avec le MPC de GVE linéarisées à PV

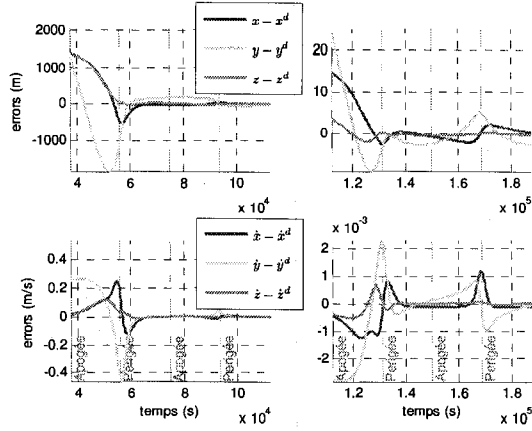


Figure 9.30 : Erreurs relatives catésiennes obtenues de la simulation 9 avec le MPC de GVE linéarisées à PV

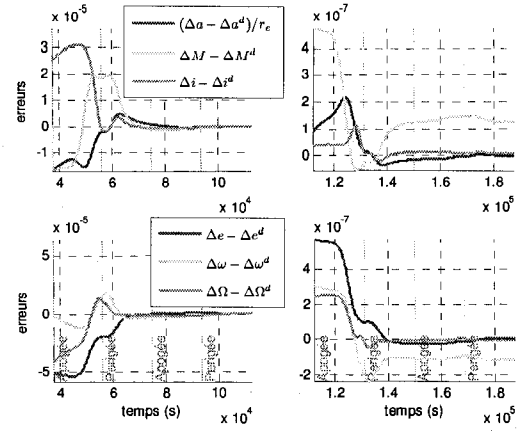


Figure 9.31 : Erreurs en différence des éléments d'orbite obtenues de la simulation 9 avec le MPC de GVE linéarisées à PV

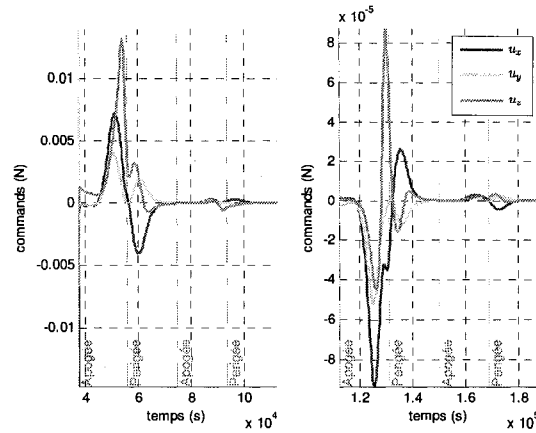


Figure 9.32 : Commandes obtenues de la simulation 9 avec le MPC de GVE linéarisées à PV

Ces résultats permettent d'effectuer quelques observations intéressantes :

- Le temps de stabilisation de cette loi de commande est très long. En fait, avec les matrices de pondération choisies, les erreurs en position et vitesse relatives ainsi qu'en différence d'éléments d'orbite deviennent satisfaisantes après environ trois orbites.
- L'ordre de grandeur des erreurs relatives en position et en vitesse obtenues en fin de simulation est supérieur à celui obtenu avec le compensateur basé sur le modèle de Lawden. Plus précisément, des erreurs aux environs de 1.24 m et de 4.08×10^{-4} m/s sont observées. Il est à noter que celles-ci sont concentrées près du périhélie et que les erreurs de plus grande amplitude sont selon l'axe y en position et selon l'axe x en vitesse. Ces erreurs, relativement importantes, sont le résultat de très faibles erreurs en différence d'éléments d'orbite. En fin de simulation, celles-ci varient autour des valeurs suivantes :

$$\Delta e - \Delta e^* = [2.09 \times 10^{-9} \quad 1.34 \times 10^{-7} \quad 8.96 \times 10^{-9} \quad 4.16 \times 10^{-9} \quad -1.12 \times 10^{-7} \quad -3.72 \times 10^{-9}]^T \quad (9.8)$$

En lien avec ce qui précède, il est possible d'affirmer que les erreurs en différence d'éléments d'orbite doivent être infimes pour obtenir des erreurs relatives exprimées dans le repère de Hill comparables à celles obtenus avec le MPC basé sur le modèle de Lawden. En fait, ce problème est connu et souvent rencontré avec d'autres types de compensateurs orbitaux. Par contre, en poursuivant la simulation ces erreurs tentent à diminuer d'orbite en orbite.

- L'effort de commande pour effectuer la reconfiguration est très faible. Les commandes sont concentrées dans deux intervalles de $\pi/2$ d'anomalie vraie centrées respectivement à $\pi/2$ et à $3\pi/2$ (latitude correspondant au semi-lactus rectum). Il est à noter qu'étant donné l'excentricité élevée de l'orbite, ces valeurs d'anomalie sont près du périégée. La commande maximum en début de manœuvre, d'une amplitude de 1.28×10^{-2} Newton, est selon z tandis que la commande maximum en fin de simulation, d'une amplitude 4.24×10^{-6} Newton, est selon x . Évidemment, l'amplitude de ces commandes est trop faible pour avoir déclenché l'algorithme de traitement des contraintes.

Les mêmes résultats sont présentés pour la simulation 11 :

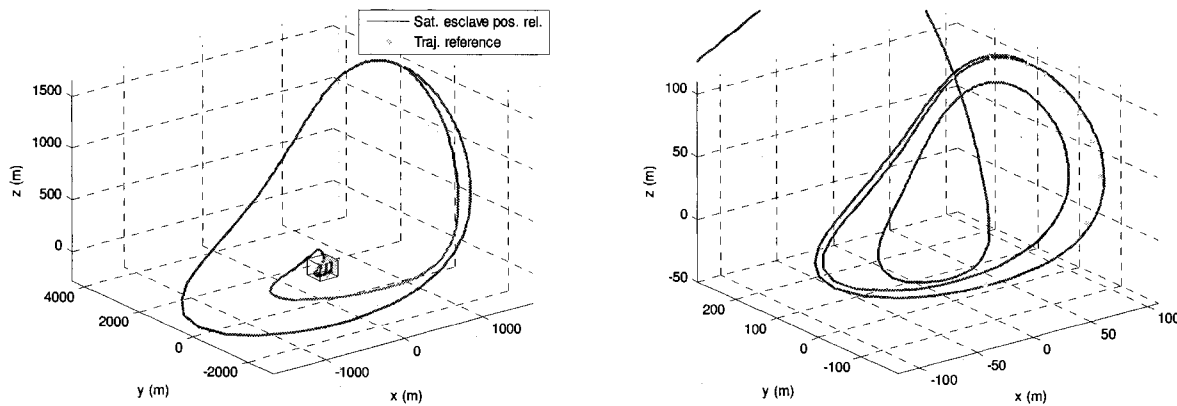


Figure 9.33 : Diagramme des phases en position obtenu de la simulation 11 avec le MPC de GVE linéarisées à PV

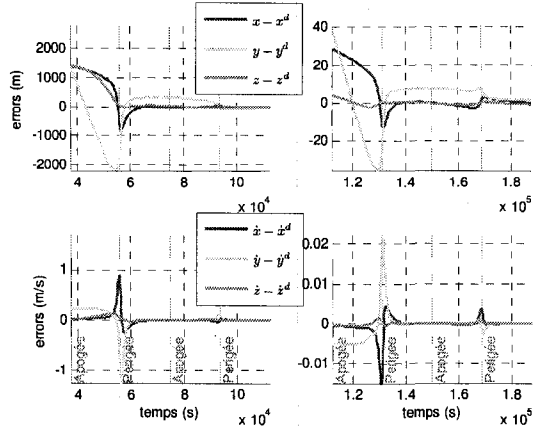


Figure 9.34 : Erreurs relatives cartésiennes obtenues de la simulation 11 avec le MPC de GVE linéarisées à PV

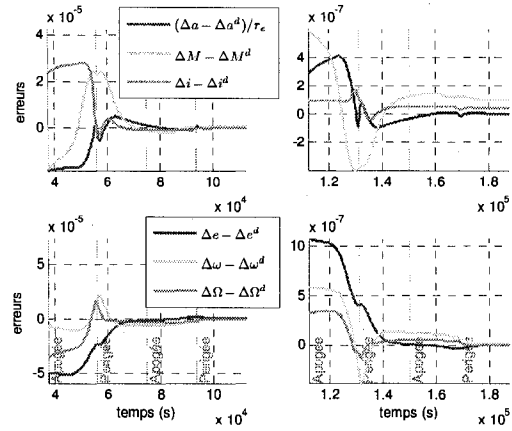


Figure 9.35 : Erreurs en différence des éléments d'orbite obtenues de la simulation 11 avec le MPC de GVE linéarisées à PV

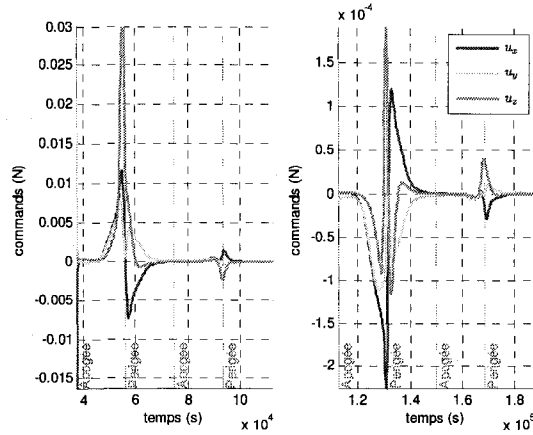


Figure 9.36 : Commandes obtenues de la simulation 11 avec le MPC de GVE linéarisées à PV

- Le temps de stabilisation est semblable à celui observé pour la manœuvre de reconfiguration d'une formation naturelle sur une orbite de 0.5 d'excentricité. En fait, les performances sont peu influencées par l'augmentation de l'excentricité.
- Les erreurs relatives en position et en vitesse se situent respectivement aux environs de 2.12 m et de 2.98×10^{-4} m/s. Encore une fois, celles-ci sont concentrées près du périhélie et les erreurs de plus grande amplitude sont selon l'axe y en position et selon l'axe x en vitesse. Les erreurs en différence d'éléments d'orbite sont aussi très faibles. En fin de simulation, celles-ci varient autour des valeurs montrées à l'équation suivante :

$$\Delta e - \Delta e^* = [3.46 \times 10^{-10} \quad 1.00 \times 10^{-7} \quad 3.42 \times 10^{-8} \quad -4.87 \times 10^{-9} \quad 2.27 \times 10^{-8} \quad 4.08 \times 10^{-9}]^T \quad (9.9)$$

- L'allure des commandes en fonction du temps est similaire à celle obtenue lors de la simulation 9. Les commandes maximales en début de manœuvre et en fin de manœuvre sont selon l'axe z et d'une amplitude de 3.00×10^{-2} Newton (valeur maximale allouée par les actionneurs) et de 3.94×10^{-5} Newton.

9.3. Résumé

Dans ce chapitre, la structure du simulateur non linéaire MATLAB® utilisé pour mettre en œuvre les lois de commande prédictives développées dans le Chapitre 8 a été présentée. Par la suite, l'influence sur les performances de l'excentricité, l'horizon de prédiction, le type de prédicteur (COP, PF et VP) et le type du modèle embarqué (Lawden et GVE linéarisées) a été démontrée. Bref, le compensateur basé sur le modèle de Lawden offre de bonnes performances avec les formations naturelles et artificielles peu importe l'excentricité de l'orbite (moyenne ou élevée). Avec cette loi de commande, le COP offre de mauvaises performances et les prédicteurs à paramètres variant (PF et PV) sont nécessaires. Cependant, la PF est suffisante la plupart du temps et un horizon de prédiction de 25 est recommandé. Le compensateur basé sur le modèle de GVE linéarisées, quant à lui, est mieux adapté aux formations naturelles. Il permet des manœuvres effectuées sur plusieurs orbites avec un effort de commande très faible. Cependant, la PV est nécessaire et plus l'horizon de prédiction est long, meilleures sont les performances. Il est intéressant de noter les différences de comportements de ces deux lois de commande qui utilisent des modèles embarqués représentant la même dynamique. En effet, le choix du vecteur d'états a souvent autant d'influence que la nature de la loi de commande utilisée.

V. DISCUSSION ET CONCLUSION

CHAPITRE 10

Discussion et conclusion

10.1. Retour sur les objectifs

Les objectifs de ce projet de recherche, présentés dans le Chapitre 6, ont été atteints :

- Des architectures d'asservissement incluant une rétroaction de l'erreur relative cartésienne basée sur modèle de Lawden et par éléments d'orbite basée sur le modèle GVE linéarisées ont été proposées.
- Les lois de commande prédictives développées considèrent la saturation des actionneurs et ont été appliquées avec succès sur des orbites d'excentricité moyenne et élevée.
- La robustesse au bruit de mesure des lois de commande proposées est supérieure aux anciennes approches, car un observateur d'états performant a été introduit dans l'algorithme.
- Les commandes déterminées par les compensateurs sont quasi-optimales sur l'horizon de prédiction et ce, même lorsque les actionneurs sont utilisés à pleine puissance (actionneurs saturés). De plus, en utilisant un algorithme explicite, la solution optimale existe toujours. Les risques d'instabilité reliés à ce phénomène sont donc nuls et ce peu importe l'orbite sur lequel évolue les satellites ou les perturbations qu'ils rencontrent.
- La charge de calcul est diminuée et la complexité d'implémentation est nettement réduite. En effet, la solution quasi-optimale étant explicite, il suffit d'utiliser quelques itérations de type Newton-Raphson pour la trouver.
- Les performances de l'approche cartésienne ont été comparées à celles de l'approche par éléments d'orbite. Il s'est avéré que la première est mieux adaptée aux manœuvres rapides sur des formations naturelles ou artificielles tandis que la deuxième permet des manœuvres lentes et économiques en propergol sur des formations naturelles seulement.

10.2. Résumé de la démarche et des contributions

Pour remplir tous ces objectifs, la démarche résumée à la Figure 10.1, à été appliquée.

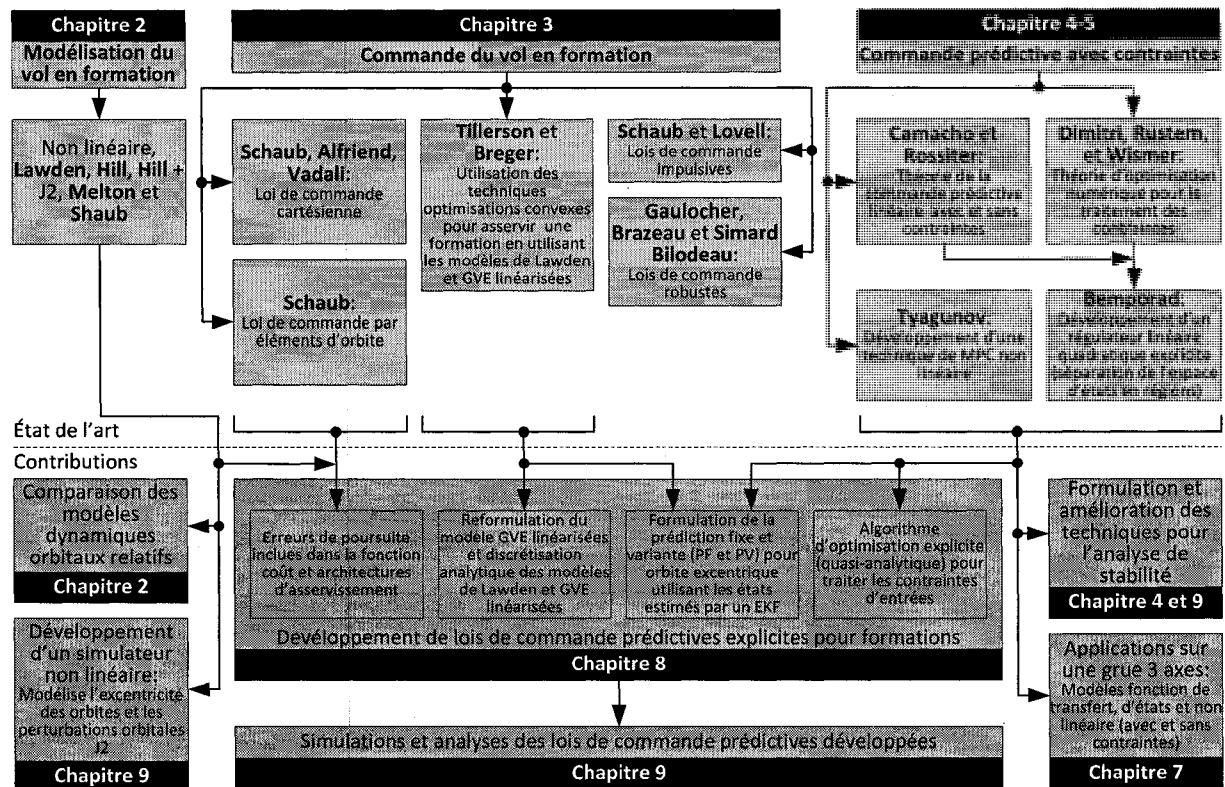


Figure 10.1 : Résumé de la démarche utilisée dans ce travail de recherche incluant l'état de l'art et les contributions

Les blocs bleus contiennent les éléments de l'état de l'art présentés tandis que les blocs verts montrent les contributions théoriques et pratiques apportées par le candidat. Les flèches qui relient ces contributions aux éléments de l'état de l'art permettent de mieux comprendre d'où proviennent les concepts théoriques utilisés.

Premièrement, le Chapitre 2 a présenté les théories linéaires et non linéaires de la modélisation du mouvement relatif entre deux satellites terrestres. Dans ce chapitre, le candidat a comparé la performance des approches les plus populaires dans le but d'évaluer leur performance et de cerner les plus appropriées pour faire le développement d'une loi de commande. La théorie présentée dans ce chapitre a aussi permis de développer le simulateur non linéaire MATLAB® et de développer les architectures d'asservissement pour formation de satellites proposés.

Deuxièmement, le Chapitre 3 a présenté les lois de commande pour les formations de satellites terrestres étudiées par l'auteur. Ce chapitre ne se voyait pas une étude exhaustive de toutes les théories existantes, mais concernait les plus importantes. Il a permis au candidat de converger vers

les théories les plus prometteuses pour asservir les formations. Plus précisément, Schaub a proposé des architectures d'asservissement intéressantes utilisant une rétroaction des erreurs relatives classiques (cartésienne-Hill et par éléments d'orbite). Parallèlement, Tillerson et Breger proposent d'utiliser des algorithmes d'optimisation convexes (linéaires) faisant intervenir une prédiction future du comportement (propre aux lois de commande prédictives) de la formation basée sur le modèle de Lawden et de GVE linéarisées. Leurs approches possèdent plusieurs désavantages présentés dans les Chapitres 3 et 8 dont leur grande complexité d'implémentation et de calcul. Pour régler une partie des inconvénients, l'auteur a proposé d'utiliser les architectures d'asservissement de Schaub basées sur des lois de commandes prédictives utilisant une fonction coût qui inclut la poursuite de l'erreur relative. Il a proposé aussi d'utiliser une version discrète analytique des modèles de Lawden et de GVE linéarisées.

Troisièmement, les Chapitres 4 et 5 ont présenté la théorie reliée à la commande prédictive discrète linéaire et non linéaire. En fait, l'auteur a présenté les modèles fonction de transfert et d'états pour effectuer la prédiction ainsi que la théorie de l'optimisation avec et sans contrainte. Des améliorations concernant les outils mathématiques d'analyses de stabilité des lois de commande prédictives ont aussi été formulées par l'auteur. Les techniques présentées dans ces chapitres ont été appliquées sur un système simple (grue trois axes) pour démontrer leur performance. La synthèse de ces travaux a été présentée au Chapitre 7. Cet exercice a aussi permis de mettre en évidence les avantages de chacune des approches dans le but de s'en inspirer pour développer et améliorer les lois de commande prédictive pour le vol en formation. Ces innovations ont été présentées au Chapitre 8. En effet, l'auteur a développé un algorithme de prédiction pour système à paramètres variant selon deux formulations (prédiction à paramètres fixes et variant sur l'horizon). Cet algorithme est utilisé conjointement à un filtre de Kalman étendu qui estime les états relatifs du système. De plus, le candidat propose un algorithme quasi-optimal, analytique et innovateur pour traiter les contraintes en entrées. Cet algorithme s'est avéré assez performant et facile à implémenter pour être utilisé dans un système spatial autonome.

Finalement, tous les éléments des lois de commande prédictive développés par l'auteur et résumés précédemment ont été validés en simulation et leurs paramètres ont été optimisés dans le Chapitre 9.

10.3. Travaux futurs

Il reste encore beaucoup de travail à faire avant de pouvoir utiliser la commande prédictive aux futures missions spatiales et plus particulièrement aux formations de satellites. En lien avec ce qui précède, l'auteur termine ce document en proposant des éléments qui pourraient être considérés pour améliorer les lois de commandes proposées :

- Utiliser une prédiction de la réponse naturelle d'une formation non linéaire analytique incluant J_2 .
- Inclure la dynamique des actionneurs et des capteurs dans l'algorithme du prédicteur.
- Coupler la loi de commande prédictive à un algorithme d'asservissement d'orientation des satellites de la formation.
- Formuler un algorithme d'optimisation explicite pouvant traiter les contraintes sur les sorties s'inspirant de la méthode du point intérieur.

VI. ANNEXES

ANNEXE A

Mathématique vectorielle

Cette annexe présente les bases de mathématique vectorielle nécessaires pour bien comprendre les développements mathématiques contenus dans ce mémoire. Celle-ci présente les définitions des notions : de vecteurs, de repères, des composantes, des vectrices et des matrices de rotation. Cette annexe qui s'inspire de (de Lafontaine 2003), se termine par une brève incursion dans le domaine de la cinématique des vectrices.

A.1. Vecteurs

Le vecteur est un concept mathématique caractérisé par une grandeur et une direction dans l'espace. Ces caractéristiques ne dépendent pas de la position et de l'orientation de l'observateur. Considérant l'entité mathématique identifiée par la variable v , le symbole \vec{v} est utilisé pour signifier que celle-ci est un vecteur et v , par abus de langage, ou $\|v\|$, plus formellement, est utilisé pour désigner la grandeur de ce dernier.

A.2. Repères

Un repère, système de référence, trièdre ou système d'axes est défini par trois vecteurs unitaires orthogonaux, nommés axes, souvent désignés par \vec{a}_x , \vec{a}_y et \vec{a}_z . Un repère est identifié par le symbole $\vec{\mathfrak{S}}_a$. La Figure A.1 montre la représentation graphique de ce dernier.

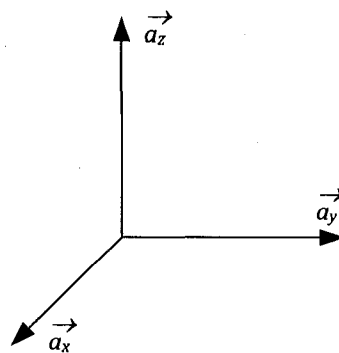


Figure A.1 : Repère a

A.3. Composantes

En projetant un vecteur sur les vecteurs unitaires qui définissent un repère, la grandeur obtenue sur chacun des axes se nomme composante. La Figure A.2 illustre le vecteur \vec{v} .

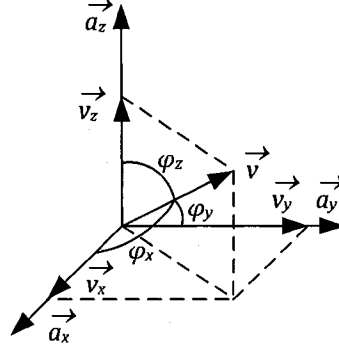


Figure A.2 : Représentation du vecteur v dans le repère a

Dans l'exemple précédent, \vec{v} s'exprime par :

$$\vec{v} = v_x \vec{a}_x + v_y \vec{a}_y + v_z \vec{a}_z \quad (\text{A.1})$$

où $v_x \vec{a}_x$, $v_y \vec{a}_y$ et $v_z \vec{a}_z$ correspondent aux composantes vectorielles et v_x , v_y et v_z sont les composantes scalaires. La version composante du vecteur \vec{v} est notée \mathbf{v} . Cette entité mathématique représente en fait les composantes scalaires du vecteur, organisées sous forme d'une matrice colonne :

$$\mathbf{v} = [v_x \quad v_y \quad v_z]^T \quad (\text{A.2})$$

La grandeur de \vec{v} peut être calculée à partir de ses composantes. Il suffit en fait d'appliquer l'équation suivante :

$$v = \|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (\text{A.3})$$

Les composantes d'un vecteur peuvent aussi être obtenues à partir des angles ϕ_x , ϕ_y et ϕ_z . Cette représentation se nomme cosinus directeur et celle-ci est présentée à l'équation qui suit :

$$\vec{v} = v(c_x \vec{a}_x + c_y \vec{a}_y + c_z \vec{a}_z) \quad (\text{A.4})$$

où $c_i = \vec{v} \cdot \vec{a}_i / v = \cos(\phi_i)$ correspond au cosinus directeur.

A.4. Vectrices

Les composantes d'un vecteur n'ont de sens que si le repère par rapport à lequel elles sont exprimées est connu. Celles-ci sont donc souvent associées à une matrice colonne qui contient les vecteurs unitaires du repère, nommée vectrice. À titre d'exemple, la vectrice du repère $\vec{\mathfrak{S}}_a$ est définie par :

$$\vec{\mathfrak{S}}_a = [\vec{a}_x \quad \vec{a}_y \quad \vec{a}_z]^T \quad (\text{A.5})$$

Par conséquent, le vecteur \vec{v} peut être exprimé en fonction de ses composantes :

$$\vec{v} = \vec{\mathfrak{S}}_a^T \mathbf{v} = \mathbf{v}^T \vec{\mathfrak{S}}_a \quad (\text{A.6})$$

Inversement, les composantes du vecteur \vec{v} peuvent être exprimées en fonction de \vec{v} :

$$\begin{aligned} v &= \vec{v} \cdot \vec{\mathfrak{S}}_a \\ v^T &= \vec{v} \cdot \vec{\mathfrak{S}}_a^T \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Les vectrices possèdent des propriétés intéressantes qui permettent de faciliter le développement des équations vectorielles :

1. Le produit scalaire d'une vectrice $\vec{\mathfrak{S}}_a$ avec elle-même transposée est une matrice identité :

$$\vec{\mathfrak{S}}_a \cdot \vec{\mathfrak{S}}_a^T = \begin{bmatrix} \vec{a}_x \\ \vec{a}_y \\ \vec{a}_z \end{bmatrix} \cdot [\vec{a}_x \quad \vec{a}_y \quad \vec{a}_z] = \begin{bmatrix} \vec{a}_x \cdot \vec{a}_x & \vec{a}_x \cdot \vec{a}_y & \vec{a}_x \cdot \vec{a}_z \\ \vec{a}_y \cdot \vec{a}_x & \vec{a}_y \cdot \vec{a}_y & \vec{a}_y \cdot \vec{a}_z \\ \vec{a}_z \cdot \vec{a}_x & \vec{a}_z \cdot \vec{a}_y & \vec{a}_z \cdot \vec{a}_z \end{bmatrix} = \mathbf{I} \quad (\text{A.8})$$

2. Le produit vectoriel d'une vectrice $\vec{\mathfrak{S}}_a$ avec elle-même transposée définit la matrice croisée :

$$\vec{\mathfrak{S}}_a \times \vec{\mathfrak{S}}_a^T = \begin{bmatrix} \vec{a}_x \\ \vec{a}_y \\ \vec{a}_z \end{bmatrix} \times [\vec{a}_x \quad \vec{a}_y \quad \vec{a}_z] = \begin{bmatrix} \vec{a}_x \times \vec{a}_x & \vec{a}_x \times \vec{a}_y & \vec{a}_x \times \vec{a}_z \\ \vec{a}_y \times \vec{a}_x & \vec{a}_y \times \vec{a}_y & \vec{a}_y \times \vec{a}_z \\ \vec{a}_z \times \vec{a}_x & \vec{a}_z \times \vec{a}_y & \vec{a}_z \times \vec{a}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{0} & \vec{a}_z & -\vec{a}_y \\ -\vec{a}_z & \vec{0} & \vec{a}_x \\ \vec{a}_y & -\vec{a}_x & \vec{0} \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

Par exemple, en utilisant les définitions montrées aux équations (A.6) et (A.7) et les propriétés précédentes, il est possible d'obtenir la version composante du produit scalaire entre deux vecteurs :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (\vec{u}^T \vec{\mathfrak{S}}_a) \cdot (\vec{\mathfrak{S}}_a^T \vec{v}) = \vec{u}^T \mathbf{I} \vec{v} = \vec{u}^T \vec{v} \quad (\text{A.10})$$

De la même manière, le produit vectoriel entre deux vecteurs correspond à $\vec{\mathfrak{S}}_a^T \vec{u}^\times \vec{v}$:

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} &= (\vec{u}^T \vec{\mathfrak{S}}_a) \times (\vec{\mathfrak{S}}_a^T \vec{v}) = \vec{u}^T (\vec{\mathfrak{S}}_a \times \vec{\mathfrak{S}}_a^T) \vec{v} = \vec{u}^T \begin{bmatrix} \vec{0} & \vec{a}_z & -\vec{a}_y \\ -\vec{a}_z & \vec{0} & \vec{a}_x \\ \vec{a}_y & -\vec{a}_x & \vec{0} \end{bmatrix} \vec{v} = [u_x \quad u_y \quad u_z] \begin{bmatrix} \vec{a}_z v_y - \vec{a}_y v_z \\ \vec{a}_x v_z - \vec{a}_z v_x \\ \vec{a}_y v_x - \vec{a}_x v_y \end{bmatrix} \\ &= \vec{\mathfrak{S}}_a^T \begin{bmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{bmatrix} = \vec{\mathfrak{S}}_a^T \vec{u}^\times \vec{v} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

où \vec{u}^\times est défini par :

$$\vec{u}^\times = \begin{bmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

A.5. Matrices de rotation

Considérer les repères $\vec{\mathfrak{S}}_a$ et $\vec{\mathfrak{S}}_b$, montrés à la Figure A.3.

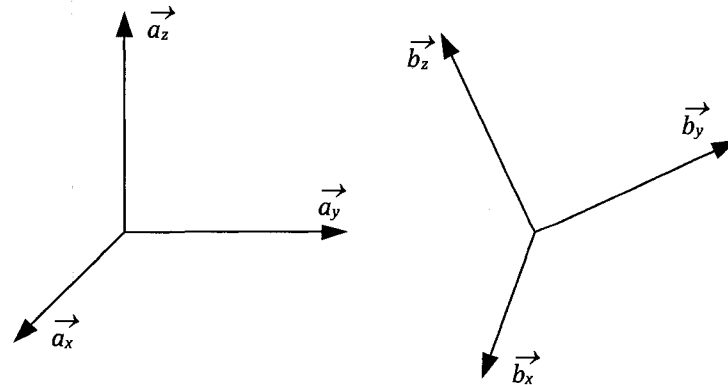


Figure A.3 :

Repères a et b

Bien que $\vec{a}_x \cdot \vec{b}_x \neq 0$, $\vec{a}_y \cdot \vec{b}_y \neq 0$ et $\vec{a}_z \cdot \vec{b}_z \neq 0$, il est possible de définir \vec{b}_x , \vec{b}_y et \vec{b}_z en fonction des vecteurs unitaires du repère $\vec{\mathcal{S}}_a$:

$$\begin{aligned}\vec{b}_x &= C_{xx}\vec{a}_x + C_{xy}\vec{a}_y + C_{xz}\vec{a}_z \\ \vec{b}_y &= C_{yx}\vec{a}_x + C_{yy}\vec{a}_y + C_{yz}\vec{a}_z \\ \vec{b}_z &= C_{zx}\vec{a}_x + C_{zy}\vec{a}_y + C_{zz}\vec{a}_z\end{aligned}\quad (\text{A.13})$$

Les coefficients C_{ij} peuvent être réorganisés dans une matrice de dimensions 3×3 , notée C_{ba} :

$$\begin{bmatrix} \vec{b}_x \\ \vec{b}_y \\ \vec{b}_z \end{bmatrix} = C_{ba} \begin{bmatrix} \vec{a}_x \\ \vec{a}_y \\ \vec{a}_z \end{bmatrix} \Leftrightarrow \vec{\mathcal{S}}_b = C_{ba} \vec{\mathcal{S}}_a \quad (\text{A.14})$$

Cette matrice dite des cosinus directeurs ou de rotation, définit la relation linéaire qui existe entre le repère $\vec{\mathcal{S}}_a$ et $\vec{\mathcal{S}}_b$. Celle-ci peut être définie en prenant le produit scalaire entre $\vec{\mathcal{S}}_b$ et $\vec{\mathcal{S}}_a^T$:

$$\vec{\mathcal{S}}_b \cdot \vec{\mathcal{S}}_a^T = C_{ba} \vec{\mathcal{S}}_a \cdot \vec{\mathcal{S}}_a^T = C_{ba} \quad (\text{A.15})$$

La matrice C_{ba} possède des caractéristiques intéressantes présentées à l'équation suivante :

$$C_{ba}^{-1} = C_{ba}^T = C_{ab} \quad (\text{A.16})$$

où $\vec{\mathcal{S}}_a = C_{ab} \vec{\mathcal{S}}_b$.

Les matrices de rotation sont très utiles pour changer le repère dans lequel les composantes d'un vecteur sont exprimées. Considérer que le vecteur \vec{v} peut être représenté dans le repère $\vec{\mathcal{S}}_a$ ou $\vec{\mathcal{S}}_b$:

$$\vec{v} = v_x^a \vec{a}_x + v_y^a \vec{a}_y + v_z^a \vec{a}_z = v_x^b \vec{b}_x + v_y^b \vec{b}_y + v_z^b \vec{b}_z \quad (\text{A.17})$$

où $()^a$ et $()^b$ indique respectivement que les composantes exprimées par rapport au repère $\vec{\mathcal{S}}_a$ et $\vec{\mathcal{S}}_b$. En utilisant les définitions présentées à l'équation (A.7), l'équation (A.17) devient :

$$\vec{v} = \vec{\mathcal{S}}_a^T v^a = \vec{\mathcal{S}}_b^T v^b \quad (\text{A.18})$$

En prenant le produit scalaire $\vec{\mathcal{S}}_a \cdot ()$ pour chacun des membres de cette égalité, le résultat suivant est obtenu :

$$\vec{\mathcal{S}}_a \cdot \vec{v} = \vec{\mathcal{S}}_a \cdot \vec{\mathcal{S}}_a^T v^a = \vec{\mathcal{S}}_a \cdot \vec{\mathcal{S}}_b^T v^b \quad (\text{A.19})$$

En utilisant la propriété des vectrices de l'équation (A.8), l'équation précédente devient :

$$\vec{\mathcal{S}}_a \cdot \vec{v} = v^a = C_{ab} v^b \quad (\text{A.20})$$

Ce résultat très important démontre qu'il suffit de multiplier la matrice des cosinus directeurs du repère $\vec{\mathcal{S}}_b$ vers $\vec{\mathcal{S}}_a$ par les composantes d'un vecteur exprimées dans $\vec{\mathcal{S}}_b$ pour obtenir les composantes de ce même vecteur exprimé dans $\vec{\mathcal{S}}_a$. L'inverse est aussi valide :

$$\vec{\mathcal{S}}_b \cdot \vec{v} = v^b = C_{ba} v^a \quad (\text{A.21})$$

Dans littérature, des matrices de rotation sont définies pour représenter les rotations élémentaires entre deux repères, nommées rotations d'Euler. Premièrement, la rotation 1 d'un angle ϕ est selon \vec{a}_x , comme le montre la Figure A.4.

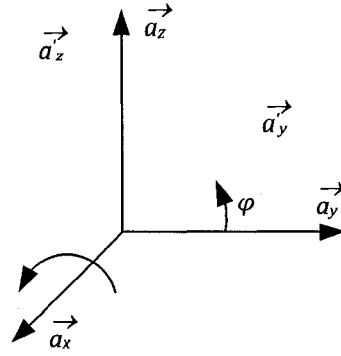


Figure A.4 : Rotation 1

La matrice des cosinus directeurs qui définit cette rotation est montrée à l'équation suivante :

$$C_1(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \quad (\text{A.22})$$

Deuxièmement, la rotation 2 d'un angle ϕ est selon \vec{a}_y , comme le montre la Figure A.5.

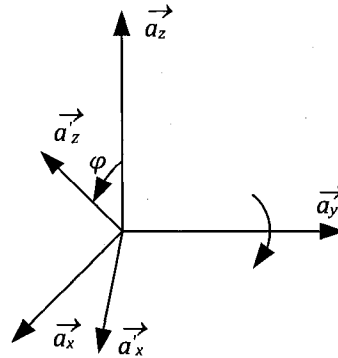


Figure A.5 : Rotation 2

La matrice des cosinus directeurs qui définit cette rotation est présentée à l'équation suivante :

$$C_2(\phi) = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & 0 & -\sin(\phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{bmatrix} \quad (\text{A.23})$$

Finalement, la rotation 2 d'un angle ϕ est selon \vec{a}_z , comme le montre la Figure A.6.

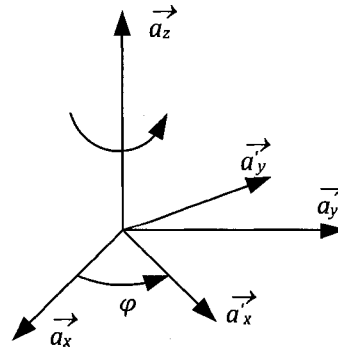


Figure A.6 : Rotation 3

La matrice des cosinus directeurs qui définit cette rotation est montrée à l'équation suivante :

$$C_3(\phi) = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.24})$$

La matrice de rotation entre deux repères quelconques de même origine, peut être définie en combinant successivement au maximum trois rotations élémentaires. À titre d'exemple, pour obtenir la matrice de rotation entre les repères inertiel et orbital, il suffit de faire successivement une rotation 3 de Ω (angle d'ascension du nœud ascendant), une rotation 1 de i (angle d'inclinaison) et enfin une rotation 3 de u (argument de latitude) de manière à obtenir C_{OI} .

Considérons le repère inertiel, noté \vec{S}_I , ayant son origine au centre de la Terre. Premièrement, une rotation autour de l'axe \vec{l}_z (rotation 3) d'un angle Ω permet de définir le repère $\vec{S}_{I'}$ comme le présente la Figure A.6.

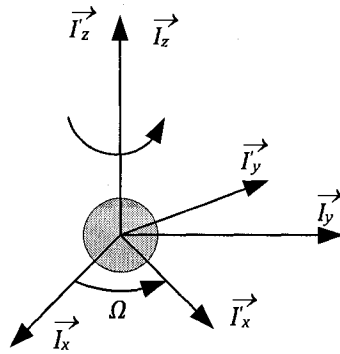
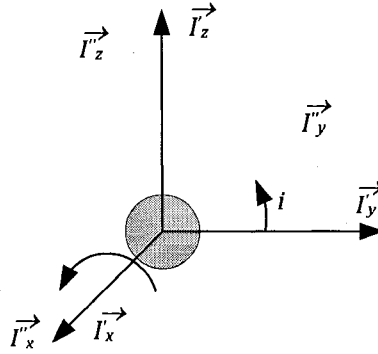


Figure A.7 : Rotation 3 de Ω du repère I au repère I'

En tournant, les axes deviennent \vec{l}'_x , \vec{l}'_y et \vec{l}'_z . \vec{l}'_x correspond à la ligne des nœuds notée \vec{l} et $\vec{l}_z = \vec{l}'_z$, car la rotation est autour de cet axe. En utilisant la définition de l'équation (A.24), la matrice des cosinus directeurs qui lie ces deux repères est obtenue :

$$\begin{bmatrix} \vec{l}'_x \\ \vec{l}'_y \\ \vec{l}'_z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\Omega) & \sin(\Omega) & 0 \\ -\sin(\Omega) & \cos(\Omega) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C_{I'I}} \begin{bmatrix} \vec{l}_x \\ \vec{l}_y \\ \vec{l}_z \end{bmatrix} \quad (\text{A.25})$$

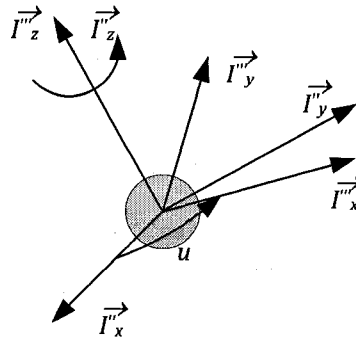
Deuxièmement, une rotation autour de l'axe \vec{l}'_x (rotation 1) d'un angle i permet de passer du repère $\vec{S}_{I'}$ au repère $\vec{S}_{I''}$, voir la Figure A.7.

Figure A.8 : Rotation 1 de i du repère I' au repère I''

Dans ce cas, les axes du nouveau repère deviennent \vec{I}''_x , \vec{I}''_y et \vec{I}''_z . $\vec{I}''_z = \vec{O}_n$ est normal au plan orbital et $\vec{I}''_x = \vec{I}'_x = \vec{I}$, car la rotation est effectuée autour de \vec{I}_x . La matrice des cosinus directeurs qui décrit cette rotation est obtenue à partir de l'équation (A.22) :

$$\begin{bmatrix} \vec{I}''_x \\ \vec{I}''_y \\ \vec{I}''_z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(i) & \sin(i) \\ 0 & -\sin(i) & \cos(i) \end{bmatrix}}_{C_{I''I'}} \begin{bmatrix} \vec{I}'_x \\ \vec{I}'_y \\ \vec{I}'_z \end{bmatrix} \quad (\text{A.26})$$

Finalement, une rotation autour de l'axe \vec{I}''_z (rotation 3) d'un angle u permet de passer du repère $\vec{S}_{I''}$ au repère $\vec{S}_{I'''} = \vec{S}_O$, c'est-à-dire au repère orbital, voir la Figure A.9.

Figure A.9 : Rotation 3 de u du repère I'' au repère O

En tournant, les axes deviennent $\vec{I}'''_x = \vec{O}_r$, $\vec{I}'''_y = \vec{O}_t$ et $\vec{I}'''_z = \vec{O}_n$. La matrice des cosinus directeurs qui représente cette rotation est montrée à l'équation suivante :

$$\begin{bmatrix} \vec{I}'''_x \\ \vec{I}'''_y \\ \vec{I}'''_z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(u) & \sin(u) & 0 \\ -\sin(u) & \cos(u) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C_{I'''I''} = C_{OI''}} \begin{bmatrix} \vec{I}''_x \\ \vec{I}''_y \\ \vec{I}''_z \end{bmatrix} \quad (\text{A.27})$$

En combinant les résultats des équations (A.25), (A.26) et (A.27), la matrice C_{OI} est obtenue :

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \vec{\partial}_r \\ \vec{\partial}_t \\ \vec{\partial}_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(u) & \sin(u) & 0 \\ -\sin(u) & \cos(u) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(i) & \sin(i) \\ 0 & -\sin(i) & \cos(i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\Omega) & \sin(\Omega) & 0 \\ -\sin(\Omega) & \cos(\Omega) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{i}_x \\ \vec{i}_y \\ \vec{i}_z \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos(u)\cos(\Omega) - \sin(u)\sin(\Omega)\cos(i) & \cos(u)\sin(\Omega) + \sin(u)\cos(\Omega)\cos(i) & \sin(u)\sin(i) \\ -\sin(u)\cos(\Omega) - \cos(u)\sin(\Omega)\cos(i) & -\sin(u)\sin(\Omega) + \cos(u)\cos(\Omega)\cos(i) & \cos(u)\sin(i) \\ \sin(\Omega)\sin(i) & -\cos(\Omega)\sin(i) & \cos(i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{i}_x \\ \vec{i}_y \\ \vec{i}_z \end{bmatrix} \quad (A.28)
 \end{aligned}$$

A.6. Cinématique des vectrices

Pour introduire la cinématique des vectrices, considérer le vecteur \vec{v} tournant selon une vitesse angulaire représentée par le vecteur $\vec{\omega}$ montré à la Figure A.10.

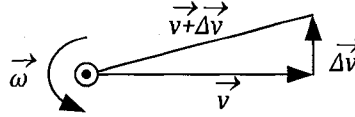


Figure A.10 : Représentation simplifiée d'une dérivée d'un vecteur tournant

La vitesse du vecteur \vec{v} peut être approximée par :

$$\Delta \vec{v} \approx (\vec{\omega} \Delta t) \times \vec{v} \quad (A.29)$$

où Δ représente une faible variation. En prenant une variation infinitésimale, Δ devient d et l'équation précédente peut être réécrite comme le montre l'équation suivante :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v} \quad (A.30)$$

La dérivée de \vec{v} par rapport au temps est donc équivalente au produit vectoriel entre la vitesse angulaire et le vecteur \vec{v} .

D'une manière plus formelle, considérer que le repère $\vec{\mathcal{S}}_b$ tourne à la vitesse angulaire $\vec{\omega}_{ba}$ par rapport à $\vec{\mathcal{S}}_a$. Sachant qu'une dérivée $d(\quad)/dt$ vue dans le repère $\vec{\mathcal{S}}_a$ est dénotée par $(\quad)^{\circ}$ et qu'une dérivée vue dans le repère $\vec{\mathcal{S}}_b$ est dénotée par $(\quad)^{\bullet}$, $\vec{\mathcal{S}}_a^{\circ} = \vec{0}$, $\vec{\mathcal{S}}_b^{\bullet} = \vec{0}$ et $\vec{\mathcal{S}}_b^{\circ} = \vec{\omega}_{ba} \times \vec{\mathcal{S}}_b$. En utilisant ces définitions, il est intéressant de développer la dérivée de \vec{v} exprimée en fonction de ses composantes dans le repère $\vec{\mathcal{S}}_a$ et en fonction de ses composantes dans le repère $\vec{\mathcal{S}}_b$:

$$\begin{aligned}
 \vec{v} &= \vec{\mathcal{S}}_a^T \vec{v}^a \\
 \dot{\vec{v}} &= \vec{\mathcal{S}}_a^T \dot{\vec{v}}^a + \dot{\vec{\mathcal{S}}}_a^T \vec{v}^a \\
 \dot{\vec{v}} &= \vec{\mathcal{S}}_a^T \dot{\vec{v}}^a
 \end{aligned}
 \quad
 \begin{aligned}
 \vec{v} &= \vec{\mathcal{S}}_b^T \vec{v}^b \\
 \dot{\vec{v}} &= \vec{\mathcal{S}}_b^T \dot{\vec{v}}^b + \dot{\vec{\mathcal{S}}}_b^T \vec{v}^b \\
 \dot{\vec{v}} &= (\vec{\omega}_{ba} \times \vec{\mathcal{S}}_b^T) \vec{v}^b + \vec{\mathcal{S}}_b^T \dot{\vec{v}}^b \\
 \dot{\vec{v}} &= \vec{\mathcal{S}}_b^T \vec{\omega}_{ba}^{\times} \vec{v}^b + \vec{\mathcal{S}}_b^T \dot{\vec{v}}^b \\
 \dot{\vec{v}} &= \vec{\mathcal{S}}_b^T (\dot{\vec{v}}^b + \vec{\omega}_{ba}^{\times} \vec{v}^b)
 \end{aligned} \quad (A.31)$$

Ces résultats permettent d'écrire la définition suivante :

$$\dot{\vec{v}} = \dot{\vec{v}} + \vec{\omega}_{ba} \times \vec{v} \quad (A.32)$$

Cette relation est très importante pour modéliser des systèmes à trois dimensions impliquant plusieurs repères tournant l'un par rapport à l'autre.

ANNEXE B

Équations de variation de Gauss

Cette annexe explique comment obtenir les équations de variation de Gauss (GVE). Pour ce faire, la théorie de variation des paramètres est présentée. Celle-ci est appliquée pour obtenir les dérivées par rapport au temps de l'axe semi-majeur, de l'excentricité, de l'angle d'ascension droit du nœud ascendant, de l'inclinaison, de l'anomalie moyenne et de l'argument du périégée. Ces équations génériques sont par la suite utilisées pour obtenir les équations de variation de Gauss.

B.1. Variation de paramètres

Pour faire la démonstration des équations de variation de Gauss, il faut brièvement introduire le concept de variation des paramètres. Celui-ci est bien décrit dans les volumes de (Bate 1971; Vallado 2001; Schaub et Junkins 2003). Sachant que les paramètres d_i correspondent aux constantes d'intégration de la solution non perturbée d'un système d'équations différentielles (réponse naturelle), la méthode de variation des paramètres consiste à trouver l'expression de \dot{e}_i telle que la solution du système perturbée a instantanément la même forme que celui non perturbé. Plus précisément, la solution non perturbée, homogène ou naturelle d'un système dynamique mécanique peut être définie par :

$$\begin{aligned} x_f(t) &= f(d, t) \\ \dot{x}_f(t) &= \frac{df(d, t)}{dt} = \dot{f}(d, t) \\ \ddot{x}_f(t) &= \frac{d^2f(d, t)}{dt^2} = \ddot{f}(d, t) \end{aligned} \tag{B.1}$$

où $d = [d_1 \quad d_2 \quad \dots]^T$. Par définition, la méthode stipule que la seule différence entre la solution non perturbée et la solution perturbée est que les éléments e_i varient dans le temps. La solution perturbée prend donc la forme suivante :

$$\begin{aligned} x(t) &= f(d(t), t) \\ \dot{x}(t) &= \frac{\partial f(d(t), t)}{\partial t} \\ \ddot{x}(t) &= \frac{\partial^2 f(d(t), t)}{\partial t^2} + a_p(t) \end{aligned} \tag{B.2}$$

où $d(t) = [d_1(t) \quad d_2(t) \quad \dots]^T$ et $a_p(t)$ est l'accélération due aux perturbations. Cependant, étant donné que $d(t)$ est en fonction du temps, les dérivées précédentes deviennent :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \dot{\mathbf{f}}(\mathbf{d}, t) + \left[\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{d}, t)}{\partial \mathbf{d}} \right] \frac{d\mathbf{d}(t)}{dt} \\ \ddot{\mathbf{x}}(t) &= \ddot{\mathbf{f}}(\mathbf{d}, t) + \left[\frac{\partial \dot{\mathbf{f}}(\mathbf{d}, t)}{\partial \mathbf{d}} \right] \frac{d\mathbf{d}(t)}{dt}\end{aligned}\quad (\text{B.3})$$

Pour que les équations (B.2) et (B.3) soient équivalentes, il faut nécessairement que les conditions suivantes soient respectées :

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{d}, t)}{\partial \mathbf{d}} \right] \frac{d\mathbf{d}}{dt} &= \mathbf{0} \\ \left[\frac{\partial \dot{\mathbf{f}}(\mathbf{d}, t)}{\partial \mathbf{d}} \right] \frac{d\mathbf{d}}{dt} &= \mathbf{a}_p(t)\end{aligned}\quad (\text{B.4})$$

À partir de l'équation précédente (Vallado 2001) propose une technique simple pour obtenir la forme Gaussienne de la théorie de la variation de paramètres. En fait, il suffit de prendre le produit de $\left[\frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{f}(\mathbf{d}, t)} \right]$ avec la première équation de (B.4) et de $\left[\frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \dot{\mathbf{f}}(\mathbf{d}, t)} \right]$ avec la deuxième équation de (B.4) et additionner le résultat pour obtenir :

$$\left(\left[\frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{f}(\mathbf{d}, t)} \right] \left[\frac{\partial \dot{\mathbf{f}}(\mathbf{d}, t)}{\partial \mathbf{d}} \right] + \left[\frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \dot{\mathbf{f}}(\mathbf{d}, t)} \right] \left[\frac{\partial \dot{\mathbf{f}}(\mathbf{d}, t)}{\partial \mathbf{d}} \right] \right) \frac{d\mathbf{d}}{dt} = \left[\frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \dot{\mathbf{f}}(\mathbf{d}, t)} \right] \mathbf{a}_p(t) \Leftrightarrow \frac{d\mathbf{d}}{dt} = \left[\frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \dot{\mathbf{f}}(\mathbf{d}, t)} \right] \mathbf{a}_p(t) \quad (\text{B.5})$$

Pour la suite de la démarche, noter que $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{d}, t)$ et $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{f}}(\mathbf{d}, t)$ seront utilisés.

B.1.1. Axe semi-majeur

À partir de l'équation (2.20), il est possible d'obtenir l'équation de Vis-Viva :

$$\mathbf{v}^T \mathbf{v} = \left(\frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a} \right) \quad (\text{B.6})$$

Cet équation met en fait le carré de la norme du vecteur vitesse du satellite, notée \mathbf{v} , en fonction du rayon de l'orbite, r , et de l'axe semi-majeur, a . En dérivant ce résultat par rapport à \mathbf{v} , l'équation suivante est obtenue :

$$2\mathbf{v}^T = \frac{\mu}{a^2} \frac{\partial a}{\partial \mathbf{v}} \Leftrightarrow \frac{\partial a}{\partial \mathbf{v}} = \frac{2a^2}{\mu} \mathbf{v}^T \quad (\text{B.7})$$

Il reste simplement à substituer l'équation précédente dans l'équation (B.5) de manière à obtenir la variation de l'axe semi-majeur :

$$\frac{da}{dt} = \frac{2a^2}{\mu} \mathbf{v}^T \mathbf{a}_p \quad (\text{B.8})$$

B.1.2. Excentricité

En utilisant la définition de la quantité de mouvement d'un satellite introduit à l'équation (2.15) et quelques propriétés du calcul vectoriel, il est possible d'obtenir l'équation suivante :

$$h^2 = (\mathbf{r}^{\times} \mathbf{v})^T (\mathbf{r}^{\times} \mathbf{v}) = r^2 (\mathbf{v}^T \mathbf{v}) - (\mathbf{r}^T \mathbf{r})^2 \quad (\text{B.9})$$

En dérivant l'équation précédente par rapport à \mathbf{v} , l'équation (B.10) est obtenue.

$$\frac{\partial h}{\partial \mathbf{v}} = \frac{1}{h} (r^2 \mathbf{v}^T - (\mathbf{r}^T \mathbf{v}) \mathbf{r}^T) \quad (\text{B.10})$$

La variation de h par rapport à \mathbf{v} peut aussi être obtenue en utilisant l'équation :

$$2h \frac{\partial h}{\partial v} = \mu \frac{\partial a}{\partial v} (1 - e^2) - 2\mu a e \frac{\partial e}{\partial v} \quad (\text{B.11})$$

En substituant les équations (B.8) et (B.10) dans l'équation (B.11) et en isolant $\partial e / \partial v$ du résultat, il est facile d'obtenir l'équation suivante :

$$\frac{\partial e}{\partial v} = \frac{1}{\mu a e} \left((pa - r^2) v^T a_p + (r^T v) r^T a_p \right) \quad (\text{B.12})$$

En utilisant l'équation (B.5) et l'équation précédente, $\partial e / \partial t$ est obtenue :

$$\frac{de}{dt} = \frac{\partial e}{\partial v} a_a = \frac{1}{\mu a e} \left((pa - r^2) v^T a_p + (r^T v) r^T a_p \right) \quad (\text{B.13})$$

B.1.3. Ascension droite du nœud ascendant et inclinaison

Les composantes de la quantité de mouvement du satellite, normale au plan orbital, peuvent être exprimées en fonction de celles des vecteurs directeurs du repère inertiel :

$$h = h(\sin(\Omega) \sin(i) I_x - \cos(\Omega) \sin(i) I_y + \cos(i) I_z) \quad (\text{B.14})$$

En dérivant ce résultat par v et en transformant les composantes des vecteurs directeurs du repère inertiel dans le repère $\vec{\mathcal{S}}_{I''}$ défini dans l'annexe A, l'équation (B.15) est obtenue.

$$\frac{\partial h}{\partial v} = h \sin(i) I_x'' \frac{\partial \Omega}{\partial v} - h I_y'' \frac{\partial i}{\partial v} + I_z'' \frac{\partial h}{\partial v} \quad (\text{B.15})$$

En effectuant la même dérivée partielle avec l'équation (2.15), il est possible d'obtenir l'équation suivante :

$$\frac{\partial h}{\partial v} = \frac{\partial(r^\times v)}{\partial v} = r^\times \quad (\text{B.16})$$

En substituant l'équation (B.15) dans l'équation (B.16) et en transposant chacun des termes du résultat, il est facile d'obtenir l'équation (B.17).

$$-r^\times = h \sin(i) \left(\frac{\partial \Omega}{\partial v} \right)^T (I_x'')^T - h \left(\frac{\partial i}{\partial v} \right)^T (I_y'')^T + \left(\frac{\partial h}{\partial v} \right)^T (I_z'')^T \quad (\text{B.17})$$

Pour obtenir la variation Ω par rapport à v , il faut prendre le produit $() I_x''$ de l'équation précédente :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial v} = \frac{1}{h \sin(i)} (I_x''^\times r)^T \quad (\text{B.18})$$

Les composantes du vecteur position du satellite, exprimées en fonction des composants des vecteur unitaire du repère $\vec{\mathcal{S}}_{I''}$, s'écrivent comme le montre l'équation suivante :

$$r = r(\cos(u) I_x'' + \sin(u) I_z'') \quad (\text{B.19})$$

En substituant ce résultat dans l'équation (B.18), il est possible d'obtenir l'équation (B.20).

$$\frac{\partial \Omega}{\partial v} = \frac{r \sin(u)}{h \sin(i)} (I_z'')^T \quad (\text{B.20})$$

Pour obtenir la variation de i par rapport à v , il faut débiter par prendre le produit $() I_y''$ de l'équation (B.17) :

$$\frac{\partial i}{\partial v} = \frac{r \cos(u)}{h} (I_z'')^T \quad (\text{B.21})$$

En substituant les équations (B.20) et (B.21) dans l'équation (B.5), les dérivées de Ω et i par rapport au temps sont respectivement obtenues :

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial\mathbf{v}} \mathbf{a}_a = \frac{r \sin(u)}{h \sin(i)} (\mathbf{I}_z'')^T \mathbf{a}_p \quad (\text{B.22})$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{\partial i}{\partial\mathbf{v}} \mathbf{a}_a = \frac{r \cos(u)}{h} (\mathbf{I}_z'')^T \mathbf{a}_p \quad (\text{B.23})$$

B.1.4. Anomalie moyenne

La démarche pour obtenir la dérivée de l'anomalie moyenne par rapport au temps est très complexe et comporte plusieurs étapes. En fait, il faut débiter par l'évaluation $\partial\theta/\partial\mathbf{v}$. Pour ce faire, il faut calculer la variation de l'équation (2.19) par rapport à \mathbf{v} :

$$re \sin(\theta) \frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{v}} = r \cos(\theta) \frac{\partial e}{\partial\mathbf{v}} - \frac{2h}{\mu} \frac{\partial h}{\partial\mathbf{v}} \quad (\text{B.24})$$

En effectuant le produit scalaire entre les composantes des vecteurs position et vitesse du satellite, il est possible de définir l'identité suivante :

$$\mathbf{r}^T \mathbf{v} = \frac{\mu}{h} re \sin(\theta) \quad (\text{B.25})$$

En dérivant ce résultat par rapport à \mathbf{v} , l'équation (B.26) est obtenue.

$$re \cos(\theta) \frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{v}} = -r \sin(\theta) \frac{\partial e}{\partial\mathbf{v}} + \frac{\mathbf{r}^T \mathbf{v}}{\mu} \frac{\partial h}{\partial\mathbf{v}} + \frac{h}{\mu} \mathbf{r}^T \quad (\text{B.26})$$

En multipliant l'équation (B.24) par $\sin(\theta)$ et (B.26) par $\cos(\theta)$ et en additionnant les résultats, il est possible d'obtenir l'équation (B.27).

$$reh \frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{v}} = p \cos(\theta) \mathbf{r}^T + (p+r) \sin(\theta) \frac{\partial h}{\partial\mathbf{v}} \quad (\text{B.27})$$

En utilisant $\partial h/\partial\mathbf{v}$, défini à l'équation (B.10), l'équation précédente devient :

$$\frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{v}} = \frac{1}{he} \left(\frac{p}{r} \cos(\theta) + \frac{p+r}{p} e \sin^2(\theta) \right) \mathbf{r}^T - \frac{r}{h^2 e} (p+r) \sin(\theta) \mathbf{v}^T \quad (\text{B.28})$$

Cette équation peut être simplifiée en utilisant l'équation (2.19) :

$$\frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{v}} = \frac{1}{he} \left(\frac{r}{p} (\cos(\theta) + e) + e \right) \mathbf{r}^T - \frac{r}{h^2 e} (p+r) \sin(\theta) \mathbf{v}^T \quad (\text{B.29})$$

Pour trouver la variation de l'anomalie excentrique par rapport à \mathbf{v} , il suffit de prendre la dérivée de l'équation (2.26) par rapport au vecteur vitesse du satellite :

$$\sin(E) (1 + e \cos(\theta)) \frac{\partial E}{\partial\mathbf{v}} = (e \cos(E) - 1) \sin(\theta) \frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{v}} + (1 - \cos(E) \cos(\theta)) \frac{\partial e}{\partial\mathbf{v}} \quad (\text{B.30})$$

En substituant les relations de $\cos(E)$ et $\sin(E)$, présentées respectivement à l'équation (2.26) et (2.27), dans l'équation précédente, il est possible d'obtenir l'équation suivante :

$$\frac{\partial E}{\partial\mathbf{v}} = \frac{r}{a\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{v}} - \frac{ra}{pb} \sin(\theta) \frac{\partial e}{\partial\mathbf{v}} \quad (\text{B.31})$$

En remplaçant $\partial\theta/\partial\mathbf{v}$, défini à l'équation (B.28) et $\partial e/\partial\mathbf{v}$ montré à l'équation (B.12), la variation partielle de l'anomalie excentrique est obtenue :

$$\frac{\partial E}{\partial \mathbf{v}} = \frac{r}{\mu a e \sqrt{1-e^2}} \left(\frac{h}{p} (\cos(\theta) + e) \mathbf{r}^T - (r + a) \sin(\theta) \mathbf{v}^T \right) \quad (\text{B.32})$$

Avec tout ce qui a été développé précédemment, il est maintenant possible d'évaluer la variation de M par rapport à \mathbf{v} . Pour ce faire, il faut calculer la variation partielle de l'équation de Kepler montrée à l'équation (2.29) :

$$\frac{\partial M}{\partial \mathbf{v}} = \frac{r}{a} \frac{\partial E}{\partial \mathbf{v}} - \sin(E) \frac{\partial e}{\partial \mathbf{v}} \quad (\text{B.33})$$

En utilisant les équations (B.32) et (B.12) dans l'équation (B.33), il est facile d'obtenir l'équation suivante :

$$\frac{\partial M}{\partial \mathbf{v}} = \frac{r \sqrt{1-e^2}}{h a e} \left(\cos(\theta) \mathbf{r}^T - \frac{a}{h} (r + p) \sin(\theta) \mathbf{v}^T \right) \quad (\text{B.34})$$

En appliquant l'équation (B.5), sachant que la réponse non perturbée de M est non nulle, il est possible d'obtenir dM/dt :

$$\frac{dM}{dt} = \frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{a}_p = n + \frac{r \sqrt{1-e^2}}{h a e} \left(\cos(\theta) \mathbf{r}^T \mathbf{a}_p - \frac{a}{h} (r + p) \sin(\theta) \mathbf{v}^T \mathbf{a}_p \right) \quad (\text{B.35})$$

B.1.5. Argument du périégée

Pour évaluer la dérivée de l'argument du périégée. Il faut débiter par définir l'identité de l'équation (B.36) en utilisant les composantes du vecteur directeur radial du repère orbital montré à l'équation (A.28) exprimé dans le repère inertiel.

$$\cos(u) = \cos(\Omega) (\mathbf{I}_x^I)^T \mathbf{O}_r^I + \sin(\Omega) (\mathbf{I}_y^I)^T \mathbf{O}_r^I \quad (\text{B.36})$$

En dérivant cette dernière par rapport à \mathbf{v} , l'équation suivante est obtenue :

$$-\sin(u) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}} = \left(-\sin(\Omega) (\mathbf{I}_x^I)^T \mathbf{O}_r^I + \cos(\Omega) (\mathbf{I}_y^I)^T \mathbf{O}_r^I \right) \frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{v}} \quad (\text{B.37})$$

En substituant \mathbf{I}_x^I , \mathbf{I}_y^I et \mathbf{O}_r^I par leur valeur, l'équation précédente devient :

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}} = -\cos(i) \frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{v}} \quad (\text{B.38})$$

Ensuite, sachant que $u = \omega + \theta$, la dérivée partielle de ω peut être obtenue :

$$\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{v}} = -\frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{v}} - \cos(i) \frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{v}} \quad (\text{B.39})$$

Finalement, en substituant $\frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{v}}$ montré à l'équation (B.29) et $\frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{v}}$ de l'équation (B.20) dans l'équation (B.39) et en utilisant de nouveau l'équation (B.5), la dérivée de l'argument du périégée par rapport au temps peut être calculée :

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{1}{h e} \left(\frac{r}{p} (\cos(\theta) + e) + e \right) \mathbf{r}^T \mathbf{a}_p - \frac{r}{h^2 e} (p + r) \sin(\theta) \mathbf{v}^T \mathbf{a}_p - \frac{r \sin(u)}{h \tan(i)} (\mathbf{I}_z^I)^T \mathbf{a}_p \quad (\text{B.40})$$

B.2. Équations de variation de Gauss

Pour obtenir les équations de variation de Gauss, il faut substituer les composantes des vecteurs contenus dans les équations développées dans la section précédente. En ce sens, les équations (B.41)

et (B.42) présentent les composantes des vecteurs position et vitesse du satellite exprimés dans le repère orbital.

$$\mathbf{r}^o = [r \ 0 \ 0]^T \quad (\text{B.41})$$

$$\mathbf{v}^o = \frac{\mu}{h} \left[e \sin(\theta) \ \frac{p}{r} \ 0 \right]^T \quad (\text{B.42})$$

De plus, il faut définir les composantes du vecteur qui représente les perturbations :

$$\mathbf{f}_p^o = [f_{p,r} \ f_{p,\theta} \ f_{p,n}]^T \quad (\text{B.43})$$

où $f_{p,r}$ est l'accélération radiale, $f_{p,\theta}$ correspond à l'accélération transversale et $f_{p,n}$ est l'accélération normale. En utilisant les équations (B.8), (B.41), (B.42) et (B.43), la dérivée de l'axe semi-majeur par rapport au temps s'exprime :

$$\frac{da}{dt} = \frac{2a^2}{h} \left(e \sin(\theta) f_{p,r} + \frac{p}{r} f_{p,\theta} \right) \quad (\text{B.44})$$

De la même manière, de/dt peut être obtenu :

$$\frac{de}{dt} = \frac{1}{h} \left(p \sin(\theta) f_{p,r} + \frac{(pa - r^2)(1 + e \cos(\theta))}{ae} f_{p,\theta} \right) \quad (\text{B.45})$$

En utilisant l'équation (2.19), l'équation précédente peut être réduite :

$$\frac{de}{dt} = \frac{1}{h} \left(p \sin(\theta) f_{p,r} + ((p+r) \cos(\theta) + re) f_{p,\theta} \right) \quad (\text{B.46})$$

La dérivée de Ω et de i est obtenue en utilisant respectivement les équations (B.22) et (B.23) :

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{r \sin(u)}{h \sin(i)} f_{p,n} \quad (\text{B.47})$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{r \cos(u)}{h} f_{p,n} \quad (\text{B.48})$$

La variation de l'anomalie moyenne par rapport au temps peut être définie en utilisant les équations (B.35), (B.41), (B.42) et (B.43) :

$$\frac{dM}{dt} = n + \frac{\sqrt{1-e^2}}{he} (p(\cos(\theta) - 2re) f_{p,r} - (p+r) \sin(\theta) f_{p,\theta}) \quad (\text{B.49})$$

Finalement, la variation par rapport au temps de l'argument du périégée peut être obtenue en substituant les équations (B.41), (B.42) et (B.43) dans l'équation (B.40) :

$$\frac{d\omega}{dt} = \left(-\frac{p}{he} \cos(\theta) f_{p,r} + \frac{1}{he} (p+r) \sin(\theta) f_{p,\theta} - \frac{r \sin(u)}{h \tan(i)} f_{p,n} \right) \quad (\text{B.50})$$

ANNEXE C

Correspondance linéaire entre les coordonnées relatives cartésiennes et la différence des éléments d'orbite

Le modèle (Schaub et Junkins 2003) utilise la correspondance linéaire entre les coordonnées relatives cartésiennes et la différence des éléments d'orbites. En effet, lorsque la distance entre le satellite chef et esclave est petite, il est possible d'exprimer les états relatifs cartésiens $x(t)$ en fonction $\Delta e(t)$ comme le montre l'équation suivante :

$$x(t) = M(e_c)\Delta e(t) \quad (C.1)$$

où $M(e_c)$ est une matrice qui dépend des éléments d'orbite de satellite chef. Pour obtenir cette matrice, il faut modifier le vecteur des éléments d'orbite classiques (Képlérienne) de manière à éviter les singularités lorsque l'orbite est circulaire :

$$e(t) = [a \quad u \quad i \quad q_1 \quad q_2 \quad \Omega]^T \quad (C.2)$$

où q_1 et q_2 sont définis par :

$$\begin{aligned} q_1 &= e \cos(\omega) \\ q_2 &= e \sin(\omega) \end{aligned} \quad (C.3)$$

Par la suite, il faut définir deux repères, notés $\vec{\mathfrak{S}}_C$ et $\vec{\mathfrak{S}}_E$, qui correspondent respectivement au repère orbital du satellite chef et du satellite esclave. De cette manière, il est possible de définir la relation qui permet de transformer les composantes du vecteur position du satellite esclave exprimé dans $\vec{\mathfrak{S}}_E$ de manière à ce qu'elles soient exprimées dans $\vec{\mathfrak{S}}_C$:

$$r_e^C = C_{CI} C_{IE} r_e^E \quad (C.4)$$

où C_{CI} et C_{IE} sont les matrices de cosinus directeurs qui relient respectivement $\vec{\mathfrak{S}}_I$ à $\vec{\mathfrak{S}}_C$ et $\vec{\mathfrak{S}}_E$ à $\vec{\mathfrak{S}}_I$. Ces matrices, présentées à l'équation (2.1), dépendent respectivement de Ω , i et u des satellites. Cette équation peut être linéarisée en évaluant la variation des paramètres r_e et C_{IE} autour des éléments d'orbite du satellite chef :

$$C_{IE} \approx C_{IC} + \Delta C_{IC} \quad (C.5)$$

$$r_e \approx r + \Delta r \quad (C.6)$$

En substituant ces équations l'équation (C.4) devient :

$$r_e^C = C_{CI}(C_{IC} + \Delta C_{IC}) \begin{bmatrix} r + \Delta r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (C.7)$$

Il suffit alors de négliger les termes de deuxième degré pour obtenir :

$$\mathbf{r}_e^C = \begin{bmatrix} r + \Delta r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + r_{CI} \begin{bmatrix} \Delta C_{IC,11} \\ \Delta C_{IC,21} \\ \Delta C_{IC,31} \end{bmatrix} \quad (\text{C.8})$$

où les paramètres $\Delta C_{IC,i1}$ sont définis aux équations suivante :

$$\Delta C_{IC,11} = (-\sin u \cos \Omega - \cos u \sin \Omega \cos i) \Delta u + (-\cos u \sin \Omega - \sin u \cos \Omega \cos i) \Delta \Omega + \sin u \sin \Omega \sin i \Delta i = C_{IC,12} \Delta u - C_{IC,21} \Delta \Omega + C_{IC,31} \sin \Omega \Delta i \quad (\text{C.9})$$

$$\Delta C_{IC,21} = (-\sin u \sin \Omega + \cos u \cos \Omega \cos i) \Delta u + (\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i) \Delta \Omega - \sin u \cos \Omega \sin i \Delta i = C_{IC,22} \Delta u + C_{IC,11} \Delta \Omega + C_{IC,31} \cos \Omega \Delta i \quad (\text{C.10})$$

$$\Delta C_{IC,31} = \cos u \sin i \Delta u + \sin u \cos i \Delta i = C_{IC,32} \Delta u + \sin u \cos i \Delta i \quad (\text{C.11})$$

En substituant les trois équations précédentes dans l'équation (C.8), il est possible d'obtenir :

$$\mathbf{r}_e^C = \begin{bmatrix} r + \Delta r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta u + \cos i \Delta \Omega \\ -\cos u \sin i \Delta \Omega + \sin u \Delta i \end{bmatrix} \quad (\text{C.12})$$

Par la suite, il faut exprimer r en fonction du vecteur d'états montré à l'équation (C.2) en utilisant les équations (2.19) et (2.22), sachant que $1 - e^2 = 1 - q_1^2 - q_2^2$ et que $1 + e \cos \theta = 1 + q_1 \cos u + q_2 \sin u$:

$$r = \frac{a(1 - q_1^2 - q_2^2)}{1 + q_1 \cos u + q_2 \sin u} \quad (\text{C.13})$$

Ensuite, la variation de r par rapport aux éléments d'orbite du satellite chef peut être évaluée en prenant la dérivée partielle de l'équation précédente par rapport à a , q_1 , q_2 et u :

$$\Delta r = \frac{r}{a} \Delta a + \frac{v_r}{v_\theta} r \Delta \theta - \frac{r}{p} (2aq_1 + r \cos u) \Delta q_1 - \frac{r}{p} (2aq_2 + r \sin u) \Delta q_2 \quad (\text{C.14})$$

où $v_r = \frac{h}{p} (q_1 \sin u - q_2 \cos u)$ et $v_\theta = \frac{h}{p} (1 + q_1 \cos u - q_2 \sin u)$ correspondent respectivement à la vitesse radiale et à la vitesse transversale du satellite chef présentées dans la Section 2.2.

En substituant l'équation (C.13) et (C.14) dans l'équation (C.12), il est possible d'obtenir la position du satellite esclave en fonction de la différence des éléments d'orbite et des éléments d'orbite du satellite chef :

$$\begin{aligned} x &= \Delta r \\ y &= r(\Delta u + \cos i \Delta \Omega) \\ z &= r(-\cos u \sin i \Delta \Omega + \sin u \Delta i) \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

Finalement, pour exprimer la vitesse relative du satellite esclave en fonction de ces mêmes paramètres, il faut utiliser la définition de la vitesse angulaire du satellite chef définie à partir de l'équation (2.18) :

$$\dot{u} = \frac{h}{r^2} \quad (\text{C.16})$$

La variation de cette équation rapport aux éléments d'orbite du satellite chef est montrée à l'équation suivante :

$$\Delta \dot{u} = \frac{\Delta h}{r^2} - 2 \frac{h}{r^3} \Delta r \quad (\text{C.17})$$

Ensuite, il est possible d'obtenir la variation de la quantité de mouvement angulaire, définie à partir de l'équation de (2.22) :

$$\Delta h = \frac{h}{2p} \Delta p \quad (\text{C.18})$$

De la même manière, Δp peut être obtenu en dérivant la seconde équation de (2.22) par rapport à a , q_1 et q_2 :

$$\Delta p = \frac{p}{a} \Delta a - 2a(q_1 \Delta q_1 + q_2 \Delta q_2) \quad (\text{C.19})$$

En substituant successivement les équations (C.19) et (C.18) dans l'équation (C.17), il est possible d'obtenir l'équation suivante :

$$\Delta \dot{u} = \left(\frac{\Delta p}{2p} - 2 \frac{h}{r} \Delta r \right) \frac{h}{r^2} \quad (\text{C.20})$$

Il ne reste qu'à prendre la dérivée par rapport au temps des équations (C.15) et substituer l'équation précédente dans le résultat de manière à obtenir :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{v_r}{2a} \Delta a + \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right) h \Delta u + (v_r a q_1 + h \sin u) \frac{\Delta q_1}{p} + (v_r a q_2 + h \cos u) \frac{\Delta q_2}{p} \\ \dot{y} &= \frac{3v_t}{2a} \Delta a + v_r \Delta u + (3v_\theta a q_1 + 2h \cos u) \frac{\Delta q_1}{p} + (3v_\theta a q_2 + 2h \sin u) \frac{\Delta q_2}{p} + v_r \cos i \Delta \Omega \\ \dot{z} &= (v_\theta \cos u + v_r \sin u) \Delta i + (v_\theta \sin u - v_r \cos u) \sin i \Delta \Omega \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

ANNEXE D

Algorithmes d'optimisation numérique

Cette annexe présente et explique les techniques d'optimisation les plus utilisées. La première partie concerne la théorie des multiplicateurs de Lagrange applicable sur tous les problèmes d'optimisation, c'est-à-dire autant linéaires, quadratiques que non linéaires. Cette théorie permet en fait de poser les équations qui doivent être résolues par la suite à l'aide de techniques numériques avancées pour obtenir la solution optimale. Les sections suivantes présentent les techniques du simplexe, de l'ensemble actif, du point intérieur et de la programmation multiparamétrique. La première technique permet de résoudre un problème d'optimisation linéaire tandis que les autres sont adaptées aux problèmes quadratiques.

D.1. Multiplicateurs de Lagrange

La technique des multiplicateurs de Lagrange est expliquée dans le volume (Wismer et Chattergy 1979). Pour bien comprendre les fondements de cette dernière, il faut considérer un problème d'optimisation où les contraintes sont seulement des égalités :

$$\min_{\mathbf{u}} J(\mathbf{u}), \quad g_i(\mathbf{u}) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, r < m \quad (\text{D.1})$$

où $J(\mathbf{u})$ est une fonction coût, g_i représente les contraintes, r est le nombre de contraintes et m est la dimension du vecteur colonne des entrées \mathbf{u} . La fonction coût et les contraintes sont quelconques, c'est-à-dire qu'elles peuvent correspondre à n'importe laquelle fonction linéaire ou non linéaire. L'objectif est donc de déterminer le point \mathbf{u}^* qui minimise la fonction coût tout en respectant l'ensemble des contraintes. Pour solutionner ce problème, Lagrange propose de former un nouveau problème équivalent, mais sans contrainte en combinant chacune des contraintes g_i à la fonction coût en utilisant les multiplicateurs de Lagrange, notés $\lambda_i = 1, 2, 3, \dots, r$. La fonction coût (D.1) devient alors :

$$L(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = J(\mathbf{u}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(\mathbf{u}) \quad (\text{D.2})$$

Cette fonction coût est souvent nommé Lagrangien et peut être minimisée en trouvant les valeurs de \mathbf{u} et $\boldsymbol{\lambda}$, notées $\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\lambda}^*$, pour lesquelles sa dérivée par rapport à \mathbf{u} et à $\boldsymbol{\lambda}$ est nulle :

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial u_j} &= \frac{\partial f}{\partial u_j} + \sum_{i=1}^r \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial u_j} = 0, & j = 1, 2, 3, \dots, m \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} &= g_i(u) = 0, & i = 1, 2, 3, \dots, r\end{aligned}\quad (\text{D.3})$$

Ces équations sont nommées conditions d'optimalité de premier ordre de Karush-Kuhn-Tucker (KKT).

La situation se complique lorsque les contraintes deviennent des inégalités de la forme :

$$h_i(u) \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, r \quad (\text{D.4})$$

Pour résoudre le problème, il faut définir les variables artificielles, notées θ_i , pour chacune des inégalités h_i :

$$\theta_j^2 = h_i(u) \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots, r \quad (\text{D.5})$$

En fait, l'équation précédente permet d'affirmer que pour toute valeur réelle de θ_i , la contrainte i est respectée. Il devient alors possible d'appliquer la démarche utilisée lorsque les contraintes sont des égalités :

$$L(u, \lambda) = f(u) + \sum_{i=1}^m \lambda_i (h_i(u) - \theta_i^2) \quad (\text{D.6})$$

Les conditions d'optimalité de premier ordre de KKT associées à ce problème deviennent :

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial u_j} &= \frac{\partial f}{\partial u_j} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial u_j} = 0, & j = 1, 2, 3, \dots, m \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} &= h_i(u) - \theta_i^2 = 0, & i = 1, 2, 3, \dots, r\end{aligned}\quad (\text{D.7})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_i} = -2\lambda_i \theta_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, r \quad (\text{D.8})$$

La dernière équation permet d'établir que $\lambda_i^* = 0$, $\theta_i^* = 0$ ou $\lambda_i^* = \theta_i^* = 0$. Pour résoudre le problème, il faut donc considérer par essais et erreurs ces trois possibilités :

- Si $\lambda_i^* = 0$ et $\theta_i^* \neq 0$, $(\theta_j^2)^* = h_i(u^*) \geq 0$ la contrainte h_i est ignorée. En fait, la solution optimale n'est pas influencée par la présence de cette contrainte. Celle-ci est donc considérée comme inactive. Dans le cas où $\lambda_i^* = 0$ pour toutes les valeurs de i , u^* correspond à la solution optimale du problème d'optimisation sans contrainte, c'est-à-dire que $df(u^*)/du = 0$.
- Si $\lambda_i^* \neq 0$ et $\theta_i^* = 0$, $h_i(u^*) = 0$ et la solution optimale est sur la frontière de la contrainte h_i . Celle-ci est à ce moment considérée comme active. Dans ce cas, $df(u^*)/du \neq 0$.
- Si $\lambda_i^* = 0$ et $\theta_i^* = 0$ pour toutes les valeurs de i , $h_i(u^*) = 0$ et la solution satisfait $df(u^*)/du = 0$. Dans ce cas, la solution optimale sans contrainte est située sur la frontière de toutes les inégalités.

Lorsque le problème est complexe, il est impossible de trouver la solution sans utiliser des techniques numériques. Plusieurs approches ont été développées selon la nature de la fonction coût utilisée. Les prochaines sections en présentent une pour les fonctions coût linéaire et trois pour celles quadratiques.

D.2. Programmation linéaire : méthode du simplex

Les outils de programmation linéaire peuvent intervenir dans l'algorithme d'un compensateur prédictif soumis à des contraintes. Cependant, la fonction coût présentée à l'équation (4.46) doit être modifiée de manière à utiliser la norme un, c'est-à-dire la valeur absolue :

$$J(u) = Q_{MPC}|Gu + f - r| + R_{MPC}|u| \quad (D.9)$$

où Q_{MPC} et R_{MPC} sont des matrices de pondération respectivement de dimensions $1 \times (N_1 - N_2 + 1)n$ et $1 \times N_3m$. Il est à noter que les indices des paramètres de l'équation précédente ont été omis pour simplifier la démarche qui suit. En définissant les deux matrices colonne $\mu \geq 0$ et $\beta \geq 0$, respectivement de longueurs $N_2 - N_1$ et N_3 , il est possible d'exprimer l'équation (D.10), sous forme d'inégalités :

$$\begin{aligned} \mu &\leq Gu + f - r \leq \mu \\ \beta &\leq u \leq \beta \\ 0 &\leq Q_{MPC}\mu + R_{MPC}\beta \leq \gamma \end{aligned} \quad (D.10)$$

Ces r inégalités peuvent être réorganisées sous une forme standard :

$$\begin{aligned} Gu - \mu &\leq f - r \\ Gu - \mu &\leq r - f \\ u - \beta &\leq 0 \\ -u - \beta &\leq 0 \\ Q_{MPC}\mu + R_{MPC}\beta - \gamma &\leq 0 \end{aligned} \quad (D.11)$$

Le problème d'optimisation devient donc équivalent à :

$$\min_x c^T x, \quad Ax \leq b, \quad x \geq 0 \quad (D.12)$$

où $c = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$ et $x = [u' \ \mu \ \beta \ \gamma]$ sont des matrices colonne de longueur s . Le paramètre u' correspond à $u - \underline{U}$ si l'algorithme de prédiction utilise l'amplitude des entrées du système ou $\Delta u - \underline{u}$ si celui-ci utilise la variation des entrées. Étant donné que x doit être plus grand que zéro, il est nécessaire de contraindre l'amplitude ou la variation de l'entrée selon le cas, de manière à ce que $u \geq \underline{U}$ ou $\Delta u \geq \underline{u}$ selon le cas. Pour obtenir la solution optimale, l'algorithme du Simplex peut être utilisé. Les fondements de cet algorithme sont décrits dans le volume de (Wisner et Chattergy 1979) et résumés dans les paragraphes qui suivent.

Pour débiter, il faut ajouter une variable artificielle par contraintes de façon à transformer ces inégalités en égalités :

$$Ax + \theta = b, \quad x, \theta \geq 0 \quad (D.13)$$

Le problème d'optimisation de l'équation (D.12) devient donc :

$$\min_v d^T v, \quad Bv = b, \quad v \geq 0 \quad (\text{D.14})$$

où $d = [c \ 0]^T$, $v = [x \ \theta]^T$ et $B = [A \ I]$. Le nouveau système d'équations formé par les contraintes peut être décrit comme suit :

$$\begin{array}{ccccccc} b_{1,1}v_1 & + \dots + & b_{1,j}v_j & + \dots + & b_{1,r+s}v_{r+s} & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \underbrace{b_{r,1}v_1}_{b^1} & + \dots + & \underbrace{b_{r,j}v_j}_{b^j} & + \dots + & \underbrace{b_{r,r+s}v_{r+s}}_{b^{r+s}} & = & b_r \end{array} \quad (\text{D.15})$$

où r est le nombre de contraintes, s et $r + s$ correspondent respectivement à la longueur des matrices colonne x et v . Ce système possède une infinité de solutions, car il est formé de r équations et $r + s$ inconnues. Cependant, en posant que s inconnues du système sont nulles, il est possible de calculer la valeur des r autres inconnues. Ceci permet d'obtenir les solutions de base du système d'équations (D.15). Les vecteurs b^j qui multiplient les r inconnues v_i , où $i = 1, \dots, r$, choisis non nulles sont identifiées par b^i et se nomment vecteurs de base. Il est possible d'obtenir une nouvelle solution de base à partir d'une solution précédente simplement en posant une des r inconnues non nulle à zéro, nommée à ce moment variable sortante, pour le remplacer par l'une des inconnues précédemment nulle, nommée variable entrante. Cette démarche ne permet pas d'assurer que les solutions de base obtenues soient réalisables, c'est-à-dire que toutes les valeurs v_j obtenues soient plus grandes ou égales à zéro. Cependant, il existe une technique mathématique qui permet d'obtenir une solution de base réalisable notée v^b à partir d'une précédente, notée v^a . Cette dernière permet de déterminer laquelle des variables sera sortante, selon la variable entrante qui a été choisie. En fait, cette technique constitue le fondement de l'algorithme du Simplex. Pour expliquer son fonctionnement, il faut établir deux réalités mathématiques évidentes inhérentes au problème. Premièrement, l'équation (D.15) peut se réécrire en fonction de v_i^a :

$$\sum_{i=1}^r v_i^a b^i = b \quad (\text{D.16})$$

Deuxièmement, étant donné que les vecteurs b^i sont linéairement indépendants, il est possible de représenter les vecteurs $b^j = [b_{1,j} \ \dots \ b_{r,j}]^T$, où $j = 1, \dots, r + s$, comme étant une combinaison linéaire des m vecteurs de base :

$$b^j = \sum_{i=1}^r \lambda_{i,j} b^i \quad (\text{D.17})$$

En intégrant l'équation précédente dans l'équation (D.16) avec une variable artificielle σ , l'équation suivante est obtenue :

$$\sum_{i=1}^r v_i^a b^i + \sigma \left[b^j - \sum_{i=1}^r \lambda_{i,j} b^i \right] = b \quad (\text{D.18})$$

De simples manipulations algébriques permettent d'obtenir :

$$\sum_{i=1}^r (v_i^a - \sigma \lambda_{i,j}) \mathbf{b}^i + \sigma \mathbf{b}^j = \mathbf{b} \quad (\text{D.19})$$

Il faut comprendre que cette représentation met en évidence les coefficients des vecteurs de base, notés \mathbf{b}^i et \mathbf{b}^j , qui correspond à la solution réalisable \mathbf{v}^b . En effet, sachant que $\sigma = v_k^a / \lambda_{k,j} = \min(v_i^a / \lambda_{i,j})$ pour tout $\lambda_{i,j} > 0$, il est possible de constater que le coefficient de \mathbf{b}^k devient zéro. En d'autres termes, le vecteur de base \mathbf{b}^k est remplacé par le vecteur \mathbf{b}^j .

L'algorithme du Simplex n'est pas basé seulement sur les explications précédentes, car celui-ci devrait comparer l'ensemble des valeurs de la fonction coût obtenue à partir de toutes les solutions réalisables de manière à trouver la solution réalisable optimale. En fait, l'algorithme est conçu pour choisir de nouveaux vecteurs de base, seulement si ceux-ci mènent vers une nouvelle solution réalisable qui permet d'obtenir un coût supérieur (pour minimiser une fonction coût, il faut simplement l'inverser). Pour comprendre comment s'articule ce processus de recherche, il faut évaluer analytiquement la fonction coût à \mathbf{v}^b :

$$\mathbf{d}^T \mathbf{v}^b = \sum_{i=1}^r (v_i^a - \sigma \lambda_{i,j}) d_i + \sigma d_j = \mathbf{d}^T \mathbf{v}^a - \sigma \left(\underbrace{\sum_{i=1}^r \lambda_{i,j} d_i}_{z_j} - d_j \right) \quad (\text{D.20})$$

Ainsi, la solution optimale réalisable est obtenue en évaluant les trois cas suivants :

- Il existe une valeur de j qui ne fait pas partie des vecteurs de base pour laquelle $z_j - d_j < 0$ et $\lambda_{i,j} > 0$ pour quelques valeurs de i , notés $\lambda_{k,j}$. Dans ce cas, il faut prendre $\sigma = \min(v_k^a / \lambda_{k,j})$ pour obtenir la nouvelle solution de base réalisable notée \mathbf{v}^b . De cette manière, cette dernière possèdera un coût nécessairement plus élevé que \mathbf{v}^a .
- L'inégalité $z_j - d_j \geq 0$ est tenue pour toute valeur de j entre $r + 1$ et $r + s$. Dans ce cas, \mathbf{v}^a correspond à la solution optimale.
- Il existe une valeur de j qui ne fait pas partie des vecteurs de base pour laquelle $z_j - d_j < 0$ et $\lambda_{i,j} \leq 0$ pour toutes les valeurs de i . Dans ce cas, le problème n'a pas de solution optimale finie.

L'Algorithme D.1 explique comment ces éléments théoriques sont utilisés pour implémenter la méthode du Simplex. Pour faciliter la compréhension, chacune des étapes de l'algorithme est appliquée à un exemple simple.

1. Construire les matrices \mathbf{v} , \mathbf{d} , \mathbf{B} et \mathbf{b} à partir des données du problème en considérant l'ajout d'une variable artificielle par contrainte. Par exemple, la fonction $J(x_1, x_2)$ montrée à l'équation (D.21) doit être maximisée, sachant que les variables x_1 et x_2 sont soumises aux contraintes de l'équation (D.22).

$$J(x_1, x_2) = 2x_1 + 4x_2 \quad (\text{D.21})$$

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 3 \\ x_2 &\leq 1 \\ x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned} \quad (\text{D.22})$$

Le problème possède trois contraintes, il est donc nécessaire d'ajouter trois variables artificielles. La matrice colonne \mathbf{v} résultante est :

$$\mathbf{v} = [x_1 \ x_2 \ u_1 \ u_2 \ u_3]^T \quad (\text{D.23})$$

La matrice ligne \mathbf{d} qui représente la fonction $J(x_1, x_2)$ devient alors :

$$\mathbf{d} = [2 \ 4 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (\text{D.24})$$

De plus, les contraintes peuvent être organisées sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (\text{D.25})$$

$\mathbf{B} \qquad \mathbf{b}$

2. Construire la table de simplex à partir du Tableau D.1 en utilisant $\lambda^n = [\mathbf{B} \ \mathbf{b}]$, où $n = 0$. Il est à noter que n est exceptionnellement utilisé pour indiquer le nombre d'itérations.

Tableau D.1 : Table de simplex

Vecteur de base	b^1	...	b^i	...	b^{r+s}	b
b^1	$\lambda_{1,1}$...	$\lambda_{1,j}$...	$\lambda_{1,r+s}$	b_1
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
b^i	$\lambda_{i,1}$...	$\lambda_{i,j}$...	$\lambda_{i,r+s}$	b_i
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
b^r	$\lambda_{r,1}$...	$\lambda_{r,j}$...	$\lambda_{r,r+s}$	b_r
z_j	z_1	...	$z_j = \sum_{i=1}^r \lambda_{i,j} d_i$...	z_{r+s}	
$z_j - d_j$	$z_1 - d_1$...	$z_j - d_j$...	$z_{r+s} - d_{r+s}$	

Ce choix de départ mène à une solution de base réalisable et les vecteurs de base qui en découlent sont reliés aux

variables artificielles. En continuant l'exemple précédent et en utilisant le Tableau D.1, il est possible de former le Tableau D.2.

Tableau D.2 : Exemple de table de simplex pour λ^0

Vecteur de base	b^1	b^2	b^3	b^4	b^5	b
b^3	1	0	1	0	0	3
b^4	0	1	0	1	0	1
b^5	1	1	0	0	1	2
z_j	0	0	0	0	0	
$z_j - d_j$	-2	-4	0	0	0	

Il est possible de déterminer que la solution de base est $\mathbf{v}^0 = [0 \ 0 \ 3 \ 1 \ 2]$, sachant que les vecteurs de base correspondent à b^3 , b^4 et b^5 .

3. Si $z_j - d_j > 0$ pour toutes les valeurs de j qui ne correspondent pas à un vecteur de base, la solution de base réalisable v^n est optimale et aller à l'étape 7, sinon continuer à l'étape suivante. Dans l'exemple, la dernière ligne de la table de simplex montrée au Tableau D.2 présente des éléments négatifs à $j = 1, 2$. La solution v^0 ne constitue donc pas la solution optimale, il faut donc continuer à l'étape suivante.
4. Si $z_j - d_j < 0$ pour toutes les valeurs de j qui ne correspondent pas à un vecteur de base et $\lambda_{i,j} \leq 0$ pour $i = 1, \dots, m$, le problème n'a pas de solution finie et aller à l'étape 7, sinon continuer à l'étape suivante. Dans l'exemple précédent, les valeurs de $z_j - d_j$ sont négatives pour $j = 1, 2$. Il faut donc vérifier si $\lambda_{i,1}$ ou $\lambda_{i,2}$ est positif pour au moins une valeur de i . Il est possible de constater que les valeurs de $\lambda_{1,1}$, $\lambda_{3,1}$, $\lambda_{2,2}$ et $\lambda_{3,2}$ sont plus grandes que zéro, donc il faut continuer à l'étape suivante.
5. Parmi les valeurs de j où $z_j - d_j < 0$, choisir celle dont la valeur de $z_j - d_j$ est minimale. Ceci détermine le vecteur de base b^j relié à la variable entrante. Parmi les valeurs de i où $\lambda_{i,j} > 0$, choisir celle dont le facteur $b_i/\lambda_{i,j}$ est minimum. Ceci détermine le vecteur b^i relié à la variable sortante. Ces valeurs de i et de j indiquent la position du pivot utilisé dans l'étape suivante. Dans l'exemple, il faut choisir $j = 2$, car $z_2 - d_2$ possède la plus petite valeur négative. La variable entrante est donc v_2 ou plus simplement x_2 . De plus, il faut choisir $i = 2$, car $\min(b_2/\lambda_{2,2}, b_3/\lambda_{3,2}) = \min(1/1, 2/1) = 1$. La variable sortante est donc v_4 .
6. Construire la table de Simplex pour λ^{n+1} et déterminer la valeur v^{n+1} en utilisant les nouveaux vecteurs de base. Pour ce faire, il suffit d'utiliser la technique de l'élimination de Gauss autour du pivot défini par $\lambda_{i,j}^n$. Une fois la table de simplex reconstruite, l'algorithme peut débiter la prochaine itération en recommençant à l'étape 3. Dans l'exemple, le pivot est $i = 2$ et $j = 2$. Il donc faut manipuler le Tableau D.2 pour que les valeurs de $\lambda_{i,j}^0$ soient nulles pour les autres valeurs de i , soit $i = 1, 3$, en utilisant les règles de mathématique linéaire. Concrètement, il faut soustraire la ligne trois de la ligne deux de manière à remplacer la ligne trois par le résultat. En inversant la ligne un et la ligne deux, il est facile d'obtenir la nouvelle table de simplex λ^1 :

Tableau D.3 : Exemple de table de simplex pour λ^1

Vecteur de base	b^1	b^2	b^3	b^4	b^5	b
b^2	0	1	0	1	0	1
b^4	1	0	1	0	0	3
b^5	1	0	0	-1	1	1
z_j	0	4	0	4	0	
$z_j - d_j$	-2	0	0	4	0	

Cette table de simplex permet d'obtenir la nouvelle solution de base, c'est-à-dire $v^1 = [0 \ b_1/\lambda_{1,2} \ b_2/\lambda_{2,3} \ 0 \ b_3/\lambda_{3,5}] = [0 \ 1 \ 3 \ 0 \ 1]$. Il suffit alors d'entreprendre l'itération deux à l'étape 3.

7. Fin de l'algorithme.

Algorithme D.1 : Programmation linéaire par la méthode du simplex

La méthode du simplex est performante. Cependant, elle demande d'ajouter plusieurs contraintes artificielles au problème. Utilisé dans un algorithme de compensateur avec un horizon élevé, la taille de la table du simplex devient très grande et d'autant plus lourde à manipuler. Il est donc difficile d'utiliser cette technique pour des systèmes autonomes où la puissance de calcul est limitée.

D.3. Programmation quadratique : méthode de l'ensemble actif

La méthode de l'ensemble actif est présentée dans les volumes de (Rustem 1998; Camacho et Bordons 2003). L'objectif de cet algorithme est de minimiser la fonction coût présentée à l'équation (4.48) et rapportée, dans sa version simplifiée, à l'équation (D.26), en considérant que celle-ci est soumise aux contraintes linéaires de l'équation (D.27) :

$$J(u) = \frac{1}{2} u^T W u + w^T u \quad (D.26)$$

$$A u \leq b \quad (D.27)$$

où le vecteur u de longueur m est la séquence de commande. Il est possible de former le sous ensemble E^k qui représente les inégalités de l'équation (D.27) actives au point u^k quelconque. Mathématiquement, ceci se traduit par l'équation (D.28),

$$E^k = \{i | a_i u^k = b_i\} \quad (D.28)$$

où a_i et b_i désignent l'inégalité i du système (D.27). Sous forme matricielle, les r contraintes actives peuvent être représentées par :

$$\tilde{A}^k u^k = \tilde{b}^k \quad (D.29)$$

où \tilde{A}^k est une matrice de dimensions $r \times m$, \tilde{b}^k est une matrice colonne de dimensions $r \times 1$ et $r < m$. L'objectif du problème est donc de trouver un point u^{k+1} qui respecte les contraintes actives tout en minimisant la fonction coût. Pour ce faire, il faut réduire le problème de manière à obtenir une fonction coût quadratique de $m - r$ variables sans contrainte. L'idée principale derrière cette approche est d'exprimer u^k en fonction d'un ensemble réduit de variables représentées par la matrice colonne v^k . Pour ce faire, il faut poser que \tilde{A}^k est formée de deux matrices concaténées, \tilde{A}_1^k et \tilde{A}_2^k :

$$\tilde{A}^k = [\tilde{A}_1^k \quad \tilde{A}_2^k] \quad (D.30)$$

où \tilde{A}_1^k est une matrice $r \times r$ de rang r et \tilde{A}_2^k est une matrice $r \times (m - r)$. De la même manière, la matrice colonne u^{k+1} peut s'exprimer comme le montre l'équation suivante :

$$u^{k+1} = \begin{bmatrix} s^k \\ v^k \end{bmatrix} \quad (D.31)$$

où s^k est de dimensions $r \times 1$ et v^k de dimensions $(m - r) \times 1$. Par conséquent, l'équation (D.29) devient :

$$\tilde{A}_1^k s^k + \tilde{A}_2^k v^k = \tilde{b}^k \quad (D.32)$$

À partir de l'équation précédente, il est possible d'exprimer s^k en fonction de v^k , car \tilde{A}_1^k est inversible :

$$s^k = (\tilde{A}_1^k)^{-1} (\tilde{b}^k - \tilde{A}_2^k v^k) \quad (D.33)$$

En remplaçant, l'équation précédente dans l'équation (D.31), l'équation suivante est obtenue :

$$\mathbf{u}^{k+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} (\tilde{\mathbf{A}}_1^k)^{-1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{Y}^k} \tilde{\mathbf{b}}^k + \underbrace{\begin{bmatrix} -(\tilde{\mathbf{A}}_1^k)^{-1} \tilde{\mathbf{A}}_2^k \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}}_{\mathbf{Z}^k} \mathbf{v}^k \quad (\text{D.34})$$

où $\tilde{\mathbf{A}}^k \mathbf{Y}^k = \mathbf{I}$, par conséquent \mathbf{Y}^k correspond à la matrice inverse gauche généralisée de $(\tilde{\mathbf{A}}^k)^T$ et $\tilde{\mathbf{A}}^k \mathbf{Z}^k = \mathbf{0}$, $\mathbf{Z}^k \mathbf{v}^k$ est donc l'espace vectoriel nul de $(\tilde{\mathbf{A}}^k)^T$. En utilisant l'équation (D.34), la fonction coût (D.26) devient :

$$\begin{aligned} J(\mathbf{v}^k) &= \frac{1}{2} (\mathbf{Y}^k \tilde{\mathbf{b}}^k + \mathbf{Z}^k \mathbf{v}^k)^T \mathbf{W} (\mathbf{Y}^k \tilde{\mathbf{b}}^k + \mathbf{Z}^k \mathbf{v}^k) + \mathbf{w}^T (\mathbf{Y}^k \tilde{\mathbf{b}}^k + \mathbf{Z}^k \mathbf{v}^k) \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{v}^k)^T (\mathbf{Z}^k)^T \mathbf{W} \mathbf{Z}^k \mathbf{v}^k + (\mathbf{w}^T + (\tilde{\mathbf{b}}^k)^T (\mathbf{Y}^k)^T \mathbf{W}) \mathbf{Z}^k \mathbf{v}^k + \left(\frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{b}}^k)^T (\mathbf{Y}^k)^T \mathbf{W} + \mathbf{w}^T \right) \mathbf{Y}^k \tilde{\mathbf{b}}^k \end{aligned} \quad (\text{D.35})$$

Sachant que $(\mathbf{Z}^k)^T \mathbf{W} \mathbf{Z}^k$ est définie positive, le minimum global de cette fonction coût est obtenu en calculant les valeurs de \mathbf{v}^k pour lesquelles la dérivée de $J(\mathbf{v}^k)$ par rapport à \mathbf{v}^k est nulle :

$$(\mathbf{v}^k)^* = -((\mathbf{Z}^k)^T \mathbf{W} \mathbf{Z}^k)^{-1} (\mathbf{Z}^k)^T (\mathbf{w} + \mathbf{W} \mathbf{Y}^k \tilde{\mathbf{b}}^k) \quad (\text{D.36})$$

Il est important de comprendre que le paramètre $\mathbf{Y}^k \tilde{\mathbf{b}}^k$ peut être égal à m'importe quel point qui respecte l'ensemble des contraintes actives. En utilisant $\mathbf{Y}^k \tilde{\mathbf{b}}^k = \mathbf{u}^k$, l'équation (D.34) devient :

$$\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}^k + \tau^k \underbrace{\mathbf{Z}^k (\mathbf{v}^k)^*}_{\mathbf{d}^k} \quad (\text{D.37})$$

où \mathbf{d}^k est la direction de recherche et τ^k est le pas. La valeur de τ^k est normalement égale à un. Cependant, si une contrainte inactive est rencontrée, il faut diminuer cette valeur pour éviter qu'une contrainte soit négligée. En fait, la distance de \mathbf{u}^k , dans le sens de \mathbf{d}^k , jusqu'à n'importe quelle contrainte qui ne fait pas partie de l'ensemble actif E^k , est donnée par la valeur de τ^k qui satisfait $\mathbf{a}_j \mathbf{u}^{k+1} = b_j$ où $j \notin E^k$. Cependant, pour s'assurer que \mathbf{u}^{k+1} est réalisable, il faut choisir la plus petite valeur de τ^k obtenue pour toutes ces contraintes. Mathématiquement, ceci se traduit par l'équation suivante :

$$\tau^k = \min_{j \notin E^k} \left\{ 1, \frac{b_j - \mathbf{a}_j \mathbf{u}^k}{\mathbf{a}_j \mathbf{d}^k} \right\} \text{ pour } \mathbf{a}_j \mathbf{d}^k > 0 \quad (\text{D.38})$$

Si $\tau^k < 1$, il faut ajouter la contrainte j rencontrée à l'ensemble E^k et le processus recommence pour trouver la valeur de \mathbf{u}^{k+2} avec ce nouvel ensemble actif. Dans le cas contraire, il faut vérifier si E^k contient une contrainte qui est devenue non active. Pour ce faire, il faut calculer les multiplicateurs de Lagrange à partir du Lagrangien montré à l'équation (D.39).

$$L(\mathbf{u}^{k+1}, \boldsymbol{\lambda}^{k+1}) = \frac{1}{2} (\mathbf{u}^{k+1})^T \mathbf{W} \mathbf{u}^{k+1} + \mathbf{w}^T \mathbf{u}^{k+1} + (\boldsymbol{\lambda}^{k+1})^T (\tilde{\mathbf{A}}^k \mathbf{u}^{k+1} - \tilde{\mathbf{b}}^k) \quad (\text{D.39})$$

En dérivant $L(\mathbf{u}^{k+1}, \boldsymbol{\lambda}^{k+1})$ par rapport à \mathbf{u}^{k+1} , la condition d'optimalité de l'équation (D.40) est formée.

$$\frac{\partial L(\mathbf{u}^{k+1}, \boldsymbol{\lambda}^{k+1})}{\partial \mathbf{u}^{k+1}} = \mathbf{W} \mathbf{u}^{k+1} + \mathbf{w} + (\tilde{\mathbf{A}}^k)^T \boldsymbol{\lambda}^{k+1} = \mathbf{0} \quad (\text{D.40})$$

Il suffit alors de calculer les valeurs λ^{k+1} en prenant la solution au sens du moindre carré obtenue en prenant le produit $\tilde{A}^k(\cdot)$ de chaque côté de l'équation précédente :

$$\lambda^{k+1} = -(\tilde{A}^k(\tilde{A}^k)^T)^{-1} \tilde{A}^k(Wu^{k+1} + w) \quad (D.41)$$

Si la plus petite valeur de λ^{k+1} , notée λ_i^{k+1} est négative, u^{k+1} n'est pas optimale. La contrainte i doit être supprimée de l'ensemble E^k et il faut débiter une nouvelle itération. La méthode de l'ensemble actif est résumée à l'Algorithme D.2.

1. Poser un point réalisable u^0 , identifier l'ensemble actif E^0 et poser $k = 0$.
2. Calculer d^k en utilisant l'équation (D.37). Si $\|d^k\| = 0$, aller à l'étape 4.
3. Poser $u^{k+1} = u^k + \tau^k d^k$, où τ^k est déterminé par l'équation (D.38). Si $\tau^k = 1$, aller à l'étape 4. Si $\tau^k < 1$ ajouter la contrainte j à l'ensemble actif E^k pour obtenir le prochain ensemble E^{k+1} , incrémenter k de 1 et aller à l'étape 2.
4. Calculer les multiplicateurs de Lagrange λ^{k+1} en utilisant l'équation (D.41). Déterminer la plus petite valeur de λ^{k+1} , notée λ_i^{k+1} . Si $\lambda_i^{k+1} < 0$, enlever la contrainte i de l'ensemble actif E^k pour obtenir le prochain ensemble E^{k+1} , incrémenter k de 1 et aller à l'étape 2. Autrement, si $\lambda_i^{k+1} > 0$, u^{k+1} est optimale et aller à l'étape 5.
5. Fin de l'algorithme.

Algorithme D.2 : Programmation quadratique par la méthode de l'ensemble actif

D.4. Programmation quadratique : Méthode du point intérieur

La méthode du point intérieur est résumée dans les volumes de (Rustem 1998; Dimitri 2003). Encore une fois, cette technique permet de minimiser la fonction coût montrée à l'équation (D.26) soumise aux inégalités de l'équation (D.27). Pour expliquer son fonctionnement, il faut introduire les variables artificielles θ , pour transformer les contraintes présentées sous forme d'inégalités en égalités. En posant $B = [A \ I]$, $x = [u \ \theta]^T$, $R = \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $r = [w \ 0]$, le programme quadratique suivant est obtenu :

$$\min_x \{J(x)\} \text{ sujet à } Bx = b, x \geq 0 \quad (D.42)$$

où $J(x)$ est la fonction coût défini par :

$$J(x) = \frac{1}{2} x^T R x + r^T x \quad (D.43)$$

Par la suite, il faut intégrer la fonction barrière suivante à la fonction coût (D.43) :

$$P(x) = -\eta \sum_{i=1}^m \ln x_i \quad (D.44)$$

Cette fonction coût devient donc :

$$J_B(x, \eta) = \frac{1}{2} x^T R x + r^T x - \eta \sum_{i=1}^m \ln x_i \quad (D.45)$$

Étant donné que $P(x)$ est définie seulement lorsque $x > 0$, il est possible d'éliminer la contrainte $x \geq 0$ du programme de l'équation (D.42) :

$$\min_x \{J_B(x, \eta) | Bx = b\} \quad (D.46)$$

Ce problème peut être résolu en utilisant la théorie des multiplicateurs de Lagrange expliquée à la Section D.1. En fait, le Lagrangien du programme quadratique précédent est :

$$L(x, \eta, \lambda) = \frac{1}{2} x^T R x + r^T x - \eta \sum_{i=1}^m \ln x_i + \lambda^T (Bx - b) \quad (D.47)$$

Pour obtenir la valeur de $x(\eta)$ qui minimise $L(x, \eta, \lambda)$, il faut résoudre le système d'équations qui correspond aux conditions d'optimalité du premier ordre de KKT suivantes :

$$\begin{bmatrix} Bx - b \\ Rx + r - \eta X^{-1} \mathbf{1} + B^T \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (D.48)$$

où la deuxième équation correspond à $\partial L(x, \eta, \lambda) / \partial x$, $\mathbf{1}$ est une matrice colonne unitaire de dimensions appropriées et X est défini par :

$$X = \text{diag}(x) = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_n \end{bmatrix} \quad (D.49)$$

Les multiplicateurs de Lagrange λ peuvent être éliminés du système d'équations. Pour ce faire, il faut multiplier l'équation de (D.48) par B () pour permettre la mise en évidence de λ :

$$B(Rx + r - \eta X^{-1} \mathbf{1}) + BB^T \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -(BB^T)^{-1} B(Rx + r - \eta X^{-1} \mathbf{1}) \quad (D.50)$$

En utilisant ce résultat, l'équation (D.48) devient :

$$\begin{bmatrix} Bx - b \\ \underbrace{(I - B^T (BB^T)^{-1} B)}_Z (Rx + r - \eta X^{-1} \mathbf{1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (D.51)$$

En posant $y = \eta X^{-1} \mathbf{1}$ et $Y = \text{diag}(y)$, le système d'équations $F(x, y)$ est obtenu :

$$F(x, y) = \begin{bmatrix} Bx - b \\ Z(Rx + r - y) \\ XY \mathbf{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \eta \mathbf{1} \end{bmatrix}, \quad x, y \geq 0 \quad (D.52)$$

L'objectif est de trouver la solution de ce système d'équations non linéaires, lorsque $\eta \rightarrow 0$, c'est-à-dire la solution optimale du problème original. Pour ce faire, il faut utiliser l'algorithme de Newton-Raphson de manière à calculer la valeur x et de y qui permet de définir à chaque itération une valeur de η positive de plus en plus petite et ce, jusqu'à ce que celle-ci soit près de zéro. Cette technique est résumée à l'Algorithme D.3.

1. Établir une valeur pour $x^0, y^0 > 0$.
2. Choisir $\sigma^k \in [0 \ 1[, \alpha^k \in]0 \ 1[$ et $\eta^k = \sigma^k (x^k)^T y^k$.
3. Si η^k est près de zéro, aller à l'étape 7 sinon continuer.
4. Résoudre le système d'équations montré à l'équation (D.53) pour d_{x^k}, d_{y^k} .

$$\nabla F(x^k, y^k) \begin{bmatrix} d_{x^k} \\ d_{y^k} \end{bmatrix} = -F(x^k, y^k) + \begin{bmatrix} 0 \\ \eta^k \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (D.53)$$

5. Calculer la valeur du pas en utilisant l'équation (D.54).

$$\tau_k = -\frac{\alpha^k}{\min\{(X^k)^{-1} d_{x^k}, (Y^k)^{-1} d_{y^k}, -\alpha^k\}} \quad (\text{D.54})$$

6. Évaluer x^{k+1} et y^{k+1} en utilisant l'équation (D.55) et aller à l'étape 2.

$$\begin{bmatrix} x^{k+1} \\ y^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^k \\ y^k \end{bmatrix} + \tau \begin{bmatrix} d_{x^k} \\ d_{y^k} \end{bmatrix} \quad (\text{D.55})$$

7. Fin de l'algorithme.

Algorithme D.3 : Programmation quadratique par la méthode du point intérieur

D.5. Programmation multiparamétrique

(Bemporad, Morari et al. 2002) ont développé un algorithme qui permet de déterminer explicitement la loi de commande qui minimise un critère quadratique. Ce dernier est inspiré des algorithmes présentés précédemment, mais déplace la lourde charge de calculs numérique lors de la conception du compensateur. Cette section explique son fonctionnement.

La programmation paramétrique permet de minimiser la fonction coût, présentée à l'équation (4.48), et rapportée à l'équation (D.56) en considérant les contraintes de l'équation (D.57).

$$J(u) = \frac{1}{2} u^T W u + u^T G^T Q (f - r) \quad (\text{D.56})$$

$$A u \leq b \quad (\text{D.57})$$

Pour établir l'algorithme de cette approche, ce problème quadratique doit être reformulé adéquatement. Premièrement, il faut considérer que le compensateur prédictif est un régulateur, c'est-à-dire que $r = 0$. Ceci simplifie la démarche et les résultats peuvent être généralisés pour r quelconque. Deuxièmement, il faut poser $Fx = G^T Q f$, pour mettre en évidence la dépendance de la réponse naturelle du système à ses états, notés x . Pour que ceci soit possible, l'équation de prédiction utilisée dans la fonction coût doit être formée à partir du modèle variables d'état du système. Troisièmement, il faut poser $b = e + Ex$, car le paramètre b dépend aussi des états du système lorsque des contraintes sont imposées sur les sorties. De cette manière, le programme quadratique des équations (D.56) et (D.57) devient :

$$J(u) = \frac{1}{2} u^T W u + u^T F x \quad (\text{D.58})$$

$$A u \leq e + E x \quad (\text{D.59})$$

Finalement, il reste à effectuer le changement de variables $z = u + W^{-1} F x$. La fonction coût et les contraintes précédentes deviennent donc respectivement :

$$J_z(z) = \frac{1}{2} z^T W z \quad (\text{D.60})$$

$$A z \leq e + \underbrace{(E + W^{-1} F) x}_s \quad (\text{D.61})$$

Pour obtenir la loi de commande à partir de cette formulation du programme quadratique, il faut établir l'espace d'états du système, c'est-à-dire l'ensemble mathématique défini par l'équation (D.62), dans lequel les valeurs de x se trouvent lorsque le compensateur évolue dans des conditions normales.

$$X = \{x | Tx \leq Z\} \quad (D.62)$$

La Figure D.11 montre un exemple typique d'un système à deux états, x_1 et x_2 , qui varient respectivement dans les intervalles $[\underline{x}_1, \bar{x}_1]$ et $[\underline{x}_2, \bar{x}_2]$.

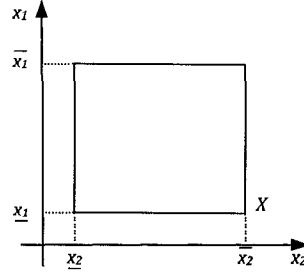


Figure D.11: Exemple d'un espace d'états à deux dimensions

Dans cet exemple, T et Z sont définis par :

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad Z = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (D.63)$$

Par la suite, (Bemporad, Morari et al. 2002) définissent x_0 , qui correspond au centre de l'hypersphère de plus grand volume contenue dans le polyèdre défini par les contraintes $Tx \leq Z$ et qui respecte les contraintes de l'équation (D.61). Avec $x = x_0$, il est possible de trouver les valeurs optimales de z en utilisant un des algorithmes de programmation quadratique présentés précédemment. Ceci permet aussi de mettre en évidence les contraintes actives, c'est-à-dire celles qui respectent l'égalité $\tilde{A}z_0 = \tilde{b} + \tilde{S}x_0$. Pour plus de détails sur les contraintes actives, référer à la section D.3. Par la suite, il suffit d'établir la région de l'espace d'états pour laquelle ces contraintes resteront actives. En effet, il faut comprendre qu'en connaissant les contraintes actives et en utilisant la théorie des multiplicateurs de Lagrange, la solution du problème de minimisation peut se résoudre analytiquement. Ainsi, le Lagrangien s'écrit :

$$L(z, \lambda) = \frac{1}{2} z^T W z + \lambda^T (\tilde{A}z - \tilde{b} - \tilde{S}x) \quad (D.64)$$

Les équations suivantes présentent les conditions d'optimalité du première ordre de KKT qui en découle :

$$\frac{\partial L(z, \lambda)}{\partial z} = Wz + \tilde{A}^T \lambda = 0 \quad (D.65)$$

$$\tilde{A}z - \tilde{b} - \tilde{S}x = 0 \quad (D.66)$$

où $\lambda > 0$. En prenant l'équation (D.65), il est possible de mettre z en évidence :

$$z = -W^{-1}\tilde{A}^T\lambda \quad (D.67)$$

En substituant cette équation dans l'équation (D.66), il est facile de définir les valeurs de λ :

$$\lambda(x) = -(\tilde{A}W^{-1}\tilde{A}^T)^{-1}(\tilde{b} + \tilde{S}x) \quad (D.68)$$

Ce résultat peut être utilisé dans l'équation (D.67) pour obtenir les valeurs optimales de z en fonction de x :

$$z(x) = W^{-1}\tilde{A}^T(\tilde{A}W^{-1}\tilde{A}^T)^{-1}(\tilde{b} + \tilde{S}x) \quad (D.69)$$

Cependant, pour que celles-ci soient valides, il faut que $\lambda > 0$ et que z respecte les contraintes de l'équation (D.61). Cette réalité se traduit par les deux inégalités suivantes :

$$-(\tilde{A}W^{-1}\tilde{A}^T)^{-1}(\tilde{b} + \tilde{S}x) \geq 0 \quad (D.70)$$

$$AW^{-1}\tilde{A}(\tilde{A}W^{-1}\tilde{A}^T)^{-1}(\tilde{b} + \tilde{S}x) \leq b + Sx \quad (D.71)$$

Bref, après avoir enlevé les contraintes redondantes, celles-ci définissent un polyèdre qui délimite la région de l'espace d'états pour lequel les conditions actives et la fonction de minimisation demeurent inchangées. Lorsque la première région, notée CR_0 , est définie, il faut découper l'espace d'états restant en d'autres régions. Pour ce faire, (Bemporad, Morari et al. 2002) proposent un algorithme de partitionnement dont le principe s'explique par la Figure D.12.

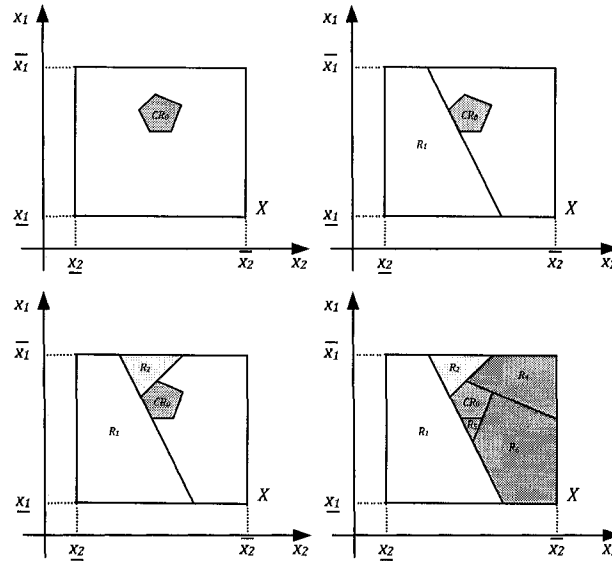


Figure D.12: Exemple de partitionnement d'un espace d'états selon l'algorithme proposé par Bemporad

Pour chacune des régions ainsi créées, il faut reprendre l'algorithme de nouveau pour le partitionner de la même manière. Finalement, une fois que l'espace d'états est complètement partitionné, il est facile d'établir la loi de commande. En fait, celle-ci correspond à une série de conditions destinées à identifier la région de l'espace d'états dans laquelle se trouvent les états présents du système asservi. Sachant la fonction de minimisation, c'est-à-dire l'équation (D.69), de cette région, il est possible de déterminer la commande optimale qui respecte les contraintes. L'Algorithme D.4 résume la

procédure pour rendre explicite une loi de commande prédictive avec contraintes utilisant une d'équation de prédiction basée sur le modèle variables d'état.

1. Définir, en utilisant des contraintes représentées par $Tx \leq Z$, l'espace d'états dans lequel les états du système asservi vont évoluer. Pour traiter cette région aller à l'étape suivante en utilisant $k = 0$.
2. Calculer x_0 de la région définie par les contraintes $Tx \leq Z$, en résolvant le problème de programmation linéaire suivant :

$$\max_{x, z, \varepsilon} \varepsilon, \quad T^k x + \varepsilon \|T^k\| \leq Z^k, \quad Gz - Sx \leq W \quad (D.72)$$
3. Si $\varepsilon \leq 0$, la région n'est pas fermée. Abandonner le partitionnement de cette dernière.
4. Pour $x = x_0$, calculer les valeurs z_0 qui minimisent l'équation (D.60) et qui respectent les contraintes de l'équation (D.61) en utilisant une méthode de programmation quadratique quelconque.
5. Déterminer les contraintes actives \tilde{A} , \tilde{b} et \tilde{S} , lorsque $x = x_0$ et $z = z_0$.
6. Établir la fonction de minimisation $z(x)$ montrée à l'équation (D.69).
7. Définir la région CR_0 en établissant les contraintes des équations (D.70) et (D.71).
8. Partitionner le restant de la région en utilisant l'algorithme présenté à la Figure D.12.
9. Pour chacune des nouvelles sous-régions recommencer l'étape 2. Si toutes les régions ont été traitées, aller à l'étape 10.
10. Pour toutes les régions où $z(x)$ est identique et pour lesquelles leur union donne un ensemble convexe, unir ces régions pour en faire qu'une seule.
11. Fin de l'algorithme.

Algorithme D.4 : Programmation multiparamétriques par la méthode proposée par Bemporad

Il est possible de modifier légèrement cet algorithme lorsque la commande prédictive s'applique à un problème de poursuite d'une trajectoire de référence. De plus, lorsque les contraintes s'appliquent seulement aux entrées du système, cet algorithme devient complètement analytique, car il est facile de définir les régions de l'espace d'états. L'article de (Serron, De Dona et al. 2000) présente comment y arriver. Cependant, le principe de cet ouvrage repose entièrement sur les travaux de (Bemporad, Morari et al. 2002) et il n'est pas nécessaire de le présenter.

À première vue, cette technique est très attirante, car elle rend la loi de commande explicite et analytique, donc utilisable pour des systèmes dynamiques rapides. Cependant, elle possède plusieurs inconvénients majeurs. En fait, elle est utilisable seulement aux problèmes dont l'horizon de prédiction est faible, car le nombre de régions dépend exponentiellement de celui-ci. En fait, le nombre de régions devient rapidement énorme et la loi de commande devient très complexe à utiliser, à gérer et à dériver et ce, même en utilisant seulement des contraintes en entrées. De plus, le concepteur doit s'assurer que le système demeure dans l'espace d'états défini pour mettre en œuvre la loi de commande, car au-delà de cette zone elle n'est pas définie.

ANNEXE E

Modélisation d'une grue à trois axes

Cette annexe présente le développement de la dynamique d'une grue à trois axes montrée à la Figure E.1,

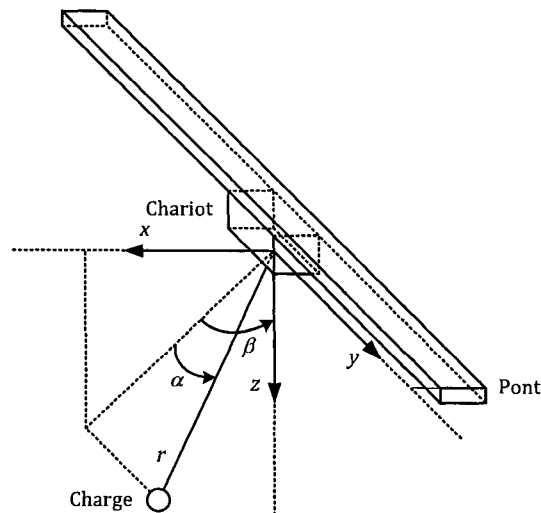


Figure E.1 : Représentation schématique de la grue trois axes

où x - y - z est le repère non dextral utilisé pour positionner la masse, r est la longueur de la corde qui soutient la masse, α est l'angle entre la projection de la corde dans le plan x - z et l'axe z et β est l'angle entre cette projection et l'axe z . Les principaux éléments de la grue sont :

- La structure de soutien qui est un cube soutenant le pont (non représenté sur la figure précédente).
- Le pont qui est une poutre selon l'axe y et qui peut se déplacer dans la direction x .
- Le chariot monté sur le pont qui peut se déplacer sur le pont dans la direction y .
- La charge qui est suspendue au chariot à l'aide d'un câble dont la longueur peut être modifiée par l'action d'un moteur.

Les indices p , w et c sont utilisés pour identifier les variables et paramètres associés respectivement au pont, au chariot et à la charge. Cette annexe est divisée en quatre sections. Premièrement, la grue est mise en équations en utilisant la deuxième loi de Newton. Deuxièmement, le modèle variables d'état non linéaire est développé. Troisièmement, ce dernier est linéarisé en utilisant une approche

innovatrice par changement de base. Finalement, les paramètres dynamiques de la grue sont présentés. Ces derniers permettent de passer de la représentation symbolique de la dynamique de la grue à la version numérique sur MATLAB®.

E.1. Mise en équations

E.1.1. Entrées

Les entrées correspondent aux forces appliquées sur le pont selon l'axe x , le chariot selon l'axe y et sur la masse selon r . Le vecteur d'entrées correspondant est défini par :

$$\mathbf{u} = [u_x \quad u_y \quad u_r]^T \quad (\text{E.1})$$

Les valeurs de \mathbf{u} varie normalement entre -1 et 1 , car elles sont pondérées par la force maximum allouée par les moteurs. Par conséquent, les forces en Newton appliquées sur les structures sont définies par :

$$\mathbf{F} = \left[\frac{F_{x\max} u_x}{F_x} \quad \frac{F_{y\max} u_y}{F_y} \quad \frac{F_{r\max} u_r}{F_r} \right]^T \quad (\text{E.2})$$

E.1.2. Sorties

Les capteurs positionnés sur la structure permettent de mesurer la position du chariot selon x et y , la longueur de la corde et l'angle α et β . Le vecteur de sorties correspondant est présenté à l'équation suivante :

$$\mathbf{y}_{mes} = [x_w \quad \beta \quad y_w \quad \alpha \quad r]^T \quad (\text{E.3})$$

Cependant, pour développer des lois de commande pour cette grue, il est beaucoup plus efficace d'asservir la position de la charge et de réguler l'amplitude des angles. Pour ce faire, il est nécessaire de faire intervenir un autre vecteur de sorties :

$$\mathbf{y}_{ctl} = [x_c \quad \beta \quad y_c \quad \alpha \quad z_c]^T \quad (\text{E.4})$$

Il est possible de définir des relations mathématiques qui définissent \mathbf{y}_{ctl} en fonction de \mathbf{y}_{mes} , celles-ci sont présentées dans la section suivante.

E.1.3. Vecteurs d'états

Ce système dynamique possède dix états qui peuvent être exprimés sous une forme cartésienne ou sphérique. Ces vecteurs d'états sont respectivement présentés aux équations suivantes :

$$\mathbf{x}_c = [x_c \quad \dot{x}_c \quad y_c \quad \dot{y}_c \quad z_c \quad \dot{z}_c \quad x_w \quad \dot{x}_w \quad y_w \quad \dot{y}_w]^T \quad (\text{E.5})$$

$$\mathbf{x}_s = [x_w \quad \dot{x}_w \quad \beta \quad \dot{\beta} \quad y_w \quad \dot{y}_w \quad \alpha \quad \dot{\alpha} \quad r \quad \dot{r}]^T \quad (\text{E.6})$$

Il est utile de définir l'application qui définit le lien mathématique entre ses deux bases. La position de la charge selon axe x en fonction de la position du chariot selon le même axe, de α et de β est obtenue trigonométriquement :

$$x_c = x_w + r \cos(\alpha) \sin(\beta) \quad (\text{E.7})$$

La vitesse de la charge en x est obtenue en dérivant l'équation précédente par rapport au temps :

$$\dot{x}_c = \dot{x}_w + \dot{r} \cos(\alpha) \sin(\beta) - r \sin(\alpha) \dot{\alpha} \sin(\beta) + r \cos(\alpha) \cos(\beta) \dot{\beta} \quad (\text{E.8})$$

Les équations qui définissent y_c , \dot{y}_c , z_c et \dot{z}_c peuvent être obtenues de la même manière :

$$y_c = y_w + r \sin(\alpha) \quad (\text{E.9})$$

$$\dot{y}_c = \dot{y}_w + \dot{r} \sin(\alpha) + r \cos(\alpha) \dot{\alpha} \quad (\text{E.10})$$

$$z_c = r \cos(\alpha) \cos(\beta) \quad (\text{E.11})$$

$$\dot{z}_c = \dot{r} \cos(\alpha) \cos(\beta) - r \sin(\alpha) \dot{\alpha} \cos(\beta) - r \cos(\alpha) \sin(\beta) \dot{\beta} \quad (\text{E.12})$$

Les équations précédentes définissent un système d'équations non linéaires montré à l'équation suivante :

$$x_c = \begin{bmatrix} x_w + \dot{r} \cos(\alpha) \sin(\beta) \\ \dot{x}_w + \dot{r} \cos(\alpha) \sin(\beta) - r \sin(\alpha) \dot{\alpha} \sin(\beta) + r \cos(\alpha) \cos(\beta) \dot{\beta} \\ y_w + r \sin(\alpha) \\ \dot{y}_w + \dot{r} \sin(\alpha) + r \cos(\alpha) \dot{\alpha} \\ r \cos(\alpha) \cos(\beta) \\ \dot{r} \cos(\alpha) \cos(\beta) - r \sin(\alpha) \dot{\alpha} \cos(\beta) - r \cos(\alpha) \sin(\beta) \dot{\beta} \\ x_w \\ \dot{x}_w \\ y_w \\ \dot{y}_w \end{bmatrix} \quad (\text{E.13})$$

$M(x_S)$

Les relations qui définissent x_S en fonction de peuvent x_C être obtenues analytiquement :

$$x_S = \begin{bmatrix} x_w \\ \dot{x}_w \\ \tan(r_x/r_z) \\ \frac{\dot{r}_x r_z - r_x \dot{r}_z}{r_z^2 \sqrt{1 + (r_x/r_z)^2}} \\ y_w \\ \dot{y}_w \\ \sin^{-1}(r_y/r) \\ \frac{\dot{r}_y r - r_y \dot{r}}{r^2 \sqrt{1 - (r_x/r)^2}} \\ r \\ \frac{r_x \dot{r}_x + r_y \dot{r}_y + r_z \dot{r}_z}{r} \end{bmatrix} \quad (\text{E.14})$$

$M^{-1}(x_C)$

où $r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}$, $r_x = x_c - x_w$, $r_y = y_c - y_w$, $r_z = z_c$, $\dot{r}_x = \dot{x}_c - \dot{x}_w$, $\dot{r}_y = \dot{y}_c - \dot{y}_w$ et $\dot{r}_z = \dot{z}_c$.

La dynamique du système c'est-à-dire dx_c/dt , est obtenue par l'analyse des diagrammes des corps libre de la charge, du chariot et du pont de la grue présenté dans les prochains paragraphes.

E.1.4. Charge

La charge transportée par la grue est soumise à deux forces : la force de gravité qui agit sur sa masse, notée m_c , et la tension dans la corde qui la soutient. Celles-ci sont montrées à la Figure E.2.

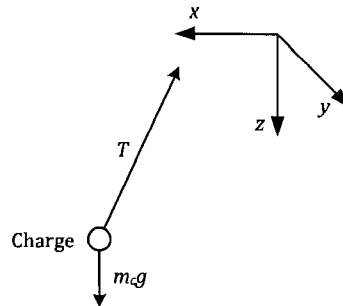


Figure E.2 : Diagramme des corps libre de la masse

En utilisant la deuxième loi de Newton selon les trois axes, les équations suivantes sont obtenues :

$$m_c \ddot{x}_c = -T \cos(\alpha) \sin(\beta) \quad (\text{E.15})$$

$$m_c \ddot{y}_c = -T \sin(\alpha) \quad (\text{E.16})$$

$$m_c \ddot{z}_c = m_c g - T \cos(\alpha) \cos(\beta) \quad (\text{E.17})$$

E.1.5. Chariot

Cinq forces sont appliquées sur le chariot de la grue : la tension dans la corde qui soutient la charge, la force de gravité qui agit sur sa masse, notée m_c , la force de réaction qui retient le chariot, la force du moteur permettant de le faire bouger dans l'axe y et enfin la force de friction qui s'oppose à son mouvement. Ces forces sont représentées schématiquement à la Figure E.3.

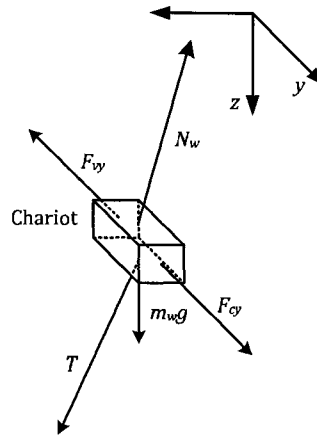


Figure E.3 : Diagramme des corps libre du chariot

En appliquant la deuxième loi de Newton selon les axes x et y , les équations suivantes sont respectivement obtenues :

$$m_w \ddot{x}_w = N_{wx} + T \cos(\alpha) \sin(\beta) \quad (\text{E.18})$$

$$m_w \ddot{y}_w = F_y - F_{vy} + T \sin(\alpha) \quad (\text{E.19})$$

Il est à noter que la dynamique selon l'axe z n'est pas considérée étant donné que le chariot ne se déplace pas verticalement.

E.1.6. Pont

Le pont de la grue est aussi soumis à cinq forces : la force de réaction qui soutient le chariot, la force de gravité qui agit sur sa masse, notée m_p , la force de réaction qui retient le pont, la force du moteur permettant de le déplacer dans l'axe x et enfin la force de friction qui s'oppose à son mouvement. Ces forces sont représentées schématiquement à la Figure E.4.

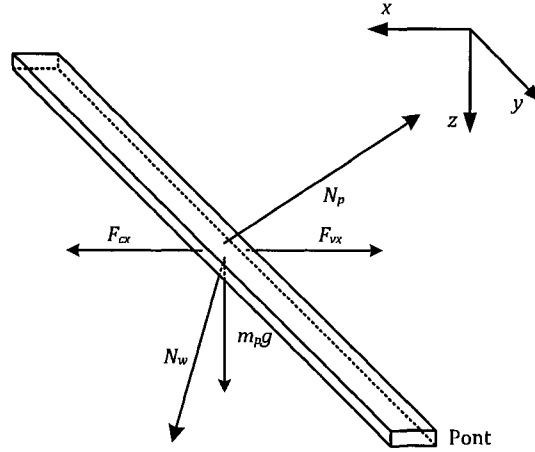


Figure E.4 : Diagramme des corps libre du pont

Seulement la dynamique en x est utilisée :

$$m_p \ddot{x}_p = -N_{wx} + F_x - F_{vx} \quad (\text{E.20})$$

E.2. Modèle variables d'état non linéaire

Pour former le modèle variables d'état, il faut considérer que la tension dans corde est définie par la différence entre la force de frottement et la force de l'actionneur selon r :

$$T = -F_r + F_{vr} \quad (\text{E.21})$$

Seulement les forces de frottement visqueux, notées F_{vx} , F_{vy} et F_{vr} , sont modélisé. Celles-ci sont proportionnelles à la vitesse :

$$\begin{aligned} F_{vx} &= b_{vx} \dot{x}_w \\ F_{vy} &= b_{vy} \dot{y}_w \\ F_{vr} &= b_{vr} \dot{r} \end{aligned} \quad (\text{E.22})$$

Le chariot et le point se déplacent ensemble selon l'axe x , il est donc possible de poser que leur l'accélération est équivalente :

$$\ddot{x}_p = \ddot{x}_w \quad (\text{E.23})$$

En utilisant l'équation (E.21), les équations (E.15), (E.16) et (E.17) deviennent :

$$m_c \ddot{x}_c = (F_r - b_{vr} \dot{r}) \cos(\alpha) \sin(\beta) \quad (\text{E.24})$$

$$m_c \ddot{y}_c = (F_r - b_{vr} \dot{r}) \sin(\alpha) \quad (\text{E.25})$$

$$m_c \ddot{z}_c = m_c g + (F_r - b_{vr} \dot{r}) \cos(\alpha) \cos(\beta) \quad (\text{E.26})$$

En additionnant l'équation (E.18) avec l'équation (E.20), la composante de la force de réaction du chariot selon l'axe x , notée N_{wx} , est annulée. Il reste donc simplement à substituer les équations (E.21) et (E.22) dans le résultat :

$$(m_w + m_p)\ddot{x}_w = F_x - b_{vx}\dot{x}_w - (F_r - b_{vr}\dot{r})\cos(\alpha)\sin(\beta) \quad (\text{E.27})$$

En substituant les équations (E.21) et (E.22) dans l'équation (E.19), l'équation suivante est obtenue :

$$m_w\ddot{y}_w = F_y - b_{vy}\dot{y}_w - (F_r - b_{vr}\dot{r})\sin(\alpha) \quad (\text{E.28})$$

Finalement, les équations d'états non linéaires du modèle variables d'état sont obtenues en organisant, sous forme d'une matrice colonne, les équations précédentes qui définissent dx_c/dt :

$$\frac{dx_c}{dt} = \begin{bmatrix} \dot{x}_w + \dot{r}\cos(\alpha)\sin(\beta) - r\sin(\alpha)\dot{\alpha}\sin(\beta) + r\cos(\alpha)\cos(\beta)\dot{\beta} \\ (F_r - b_{vr}\dot{r})\cos(\alpha)\sin(\beta) \\ \dot{y}_w + \dot{r}\sin(\alpha) + r\cos(\alpha)\dot{\alpha} \\ (F_r - b_{vr}\dot{r})\sin(\alpha) \\ \dot{r}\cos(\alpha)\cos(\beta) - r\sin(\alpha)\dot{\alpha}\cos(\beta) - r\cos(\alpha)\sin(\beta)\dot{\beta} \\ m_cg + (F_r - b_{vr}\dot{r})\cos(\alpha)\cos(\beta) \\ \dot{x}_w \\ F_x - b_{vx}\dot{x}_w - (F_r - b_{vr}\dot{r})\cos(\alpha)\sin(\beta) \\ \dot{y}_w \\ F_y - b_{vy}\dot{y}_w - (F_r - b_{vr}\dot{r})\sin(\alpha) \end{bmatrix} \quad (\text{E.29})$$

$h(x_s, u)$

Les équations de sorties du modèle variables d'état, c'est-à-dire les équations qui définissent y_{ctl} et y_{mes} en fonction de x_s sont présentées à l'équation suivante :

$$y_{ctl} = \begin{bmatrix} x_w + r\cos(\alpha)\sin(\beta) \\ \beta \\ y_w + r\sin(\alpha) \\ \alpha \\ r\cos(\alpha)\cos(\beta) \end{bmatrix} \quad (\text{E.30})$$

$p_{ctl}(x_s, u)$

$$y_{mes} = \begin{bmatrix} x_w \\ \beta \\ y_w \\ \alpha \\ r \end{bmatrix}$$

$p_{mes}(x_s, u)$

E.3. Linéarisation

La version linéarisée de la dynamique décrit le comportement du système autour d'un point d'opération défini par \bar{x}_s ou \bar{x}_c et \bar{u} . Ce dernier est représenté mathématiquement par :

$$\begin{aligned} \Delta x_s &= x_s - \bar{x}_s \\ \Delta x_c &= x_c - \bar{x}_c \\ \Delta u &= u - \bar{u} \end{aligned} \quad (\text{E.31})$$

L'expression linéaire de l'équation d'états, c'est-à-dire, $d\Delta x_c/dt$ est obtenue en prenant les dérivées partielles de $h(x_s, u)$ par rapport à x_s et à u évaluées au point d'opération choisi :

$$\frac{d\Delta x_c}{dt} = \frac{\partial h}{\partial x_s}(\bar{x}_s, \bar{u})\Delta x_s + \frac{\partial h}{\partial u}(\bar{u})\Delta u \quad (\text{E.32})$$

Cependant, ce modèle variables d'état n'est pas sous une forme standard, car il fait intervenir les états des deux bases (cartésienne et sphérique). Pour obtenir cette forme standard, il faut linéariser la matrice colonne \mathbf{M} autour de $\bar{\mathbf{x}}_S$ de manière à obtenir $\Delta \mathbf{x}_C$ en fonction de $\Delta \mathbf{x}_S$:

$$\Delta \mathbf{x}_C = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{x}_S}(\bar{\mathbf{x}}_S) \Delta \mathbf{x}_S \quad (\text{E.33})$$

En substituant cette équation dans l'équation (E.32) et en mettant en évidence $\Delta \mathbf{x}_S$, il est possible d'obtenir l'équation d'état linéaire :

$$\frac{d\Delta \mathbf{x}_S}{dt} = \underbrace{\mathbf{M}_A^{-1}(\bar{\mathbf{x}}_S) \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}_S}(\bar{\mathbf{x}}_S, \bar{\mathbf{u}})}_{\mathbf{A}_{gr}(\bar{\mathbf{x}}_S, \bar{\mathbf{u}})} \Delta \mathbf{x}_S + \underbrace{\mathbf{M}_A^{-1}(\bar{\mathbf{x}}_S) \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}}(\bar{\mathbf{u}})}_{\mathbf{B}_{gr}(\bar{\mathbf{x}}_S, \bar{\mathbf{u}})} \Delta \mathbf{u} \quad (\text{E.34})$$

De la même façon, l'expression linéaire de l'équation de sorties du modèle variables d'état pour \mathbf{y}_{ctl} et \mathbf{y}_{mes} est obtenue :

$$\Delta \mathbf{y}_{ctl} = \underbrace{\frac{\partial \mathbf{p}_{ctl}}{\partial \mathbf{x}_S}}_{\mathbf{C}_{gr,ctl}(\bar{\mathbf{x}}_S, \bar{\mathbf{u}})} \Delta \mathbf{x}_S + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{p}_{ctl}}{\partial \mathbf{u}}}_{\mathbf{D}_{gr,ctl}(\bar{\mathbf{x}}_S, \bar{\mathbf{u}})} \Delta \mathbf{u} \quad (\text{E.35})$$

$$\Delta \mathbf{y}_{mes} = \underbrace{\frac{\partial \mathbf{p}_{mes}}{\partial \mathbf{x}_S}}_{\mathbf{C}_{gr,mes}(\bar{\mathbf{x}}_S, \bar{\mathbf{u}})} \Delta \mathbf{x}_S + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{p}_{mes}}{\partial \mathbf{u}}}_{\mathbf{D}_{gr,mes}(\bar{\mathbf{x}}_S, \bar{\mathbf{u}})} \Delta \mathbf{u} \quad (\text{E.36})$$

Il est à noter que $\mathbf{p}_{mes}(\mathbf{x}_S, \mathbf{u})$ est déjà linéaire par rapport aux états et aux entrées. En prenant le point d'opération suivant :

$$\bar{\mathbf{x}}_S = [\bar{x}_w \ 0 \ 0 \ 0 \ \bar{y}_w \ 0 \ 0 \ 0 \ \bar{r} \ 0]^T \quad (\text{E.37})$$

$$\bar{\mathbf{u}} = [0 \ 0 \ -m_c g]$$

l'équation d'état linéaire devient :

$$\mathbf{A}_{gr}(\bar{\mathbf{x}}_S, \bar{\mathbf{u}}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{vx}}{m_w + m_p} & \frac{m_c g}{m_w + m_p} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b_{vx}}{\bar{r}(m_w + m_p)} & -\frac{g(m_w + m_p + m_c)}{\bar{r}(m_w + m_p)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{b_{vy}}{m_w} & \frac{m_c g}{m_w} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{b_{vy}}{\bar{r}m_w} & -\frac{g(m_w + m_c)}{\bar{r}m_w} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{b_{vr}}{m_c} \end{bmatrix} \quad (\text{E.38})$$

$$B_{gr}(\bar{x}_s, \bar{u}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{F_{xmax}}{m_w + m_p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{F_{xmax}}{\bar{r}(m_w + m_p)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{F_{ymax}}{m_w} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{F_{ymax}}{\bar{r}m_w} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{F_{rmax}}{m_c} \end{bmatrix} \quad (E.39)$$

De plus, les matrices de sorties $C_{gr,ctl}$, $D_{gr,ctl}$, $C_{gr,mes}$ et $D_{gr,mes}$ deviennent :

$$\begin{aligned} C_{gr,ctl}(\bar{x}_s, \bar{u}) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \bar{r} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \bar{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ C_{gr,mes}(\bar{x}_s, \bar{u}) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ D_{gr,ctl}(\bar{x}_s, \bar{u}) &= D_{gr,mes}(\bar{x}_s, \bar{u}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (E.40)$$

Le modèle A_{gr} , B_{gr} , C_{gr} , D_{gr} peut être utilisé pour développer des lois de commande linéaires, considérant que la grue est maintenue près de son point d'équilibre pendant son opération.

E.4. Définition des paramètres

Les valeurs qui définissent les paramètres utilisés dans cette annexe sont présentées dans le Tableau E.4.

Tableau E.4 : Paramètres mécaniques de la grue trois axes

Paramètres	Valeur	
m_p	2.200	kg
m_w	1.155	kg
m_c	0.480	kg
b_{vy}	100	$\frac{kg}{s}$
b_{vx}	100	$\frac{kg}{s}$
b_{vr}	100	$\frac{kg}{s}$
F_{xmax}	40	N
F_{ymax}	34	N
F_{rmax}	9.81	N
\bar{r}	0.5	m
g	9.81	$\frac{m}{s^2}$

Ces paramètres correspondent à ceux de la grue « 3d-crane » du laboratoire « TEAM » situé au Département de génie électrique et de génie informatique de la Faculté de génie de l'Université de Sherbrooke. Ils sont adéquats pour faire le développement de loi de commande.

BIBLIOGRAPHIE

- Alazard, D., Cumer, C., et al. (1999). *Robustesse et Commande Optimale*, Cepadue Éditions.
- Alfriend, K. T., Schaub, H., et al. (2000). *Perturbations, Nonlinearity and Circular Orbit Assumption Effects on Formation Flying Controls Strategies*. AAS Guidance and Control Conference, Breckenridge, Colorado.
- Allgöwer, F. and Zheng, A. (2000). *Nonlinear Model Predictive Control*, Birkhäuser Verlag.
- Bate, R. R. (1971). *Fundamentals of Astrodynamics*, Dover Publication.
- Bemporad, A., Morari, M., et al. (2002). The explicit linear quadratic regulator for constrained systems. *Automatica* 38(1), p. 3-20.
- Brazeau, P., Simard Bilodeau, V., et al. (2008). *Robust Control Law for Formation Flying Satellite in Eccentric Orbits*. 18th AAS/AIAA Space Flight Mechanics Conference, Galveston, Texas
- Breger, L. and How, J. P. (2004). *GVE-Based Dynamics and Control for Formation Flying Spacecraft*. 2nd International Symposium on Formation Flying Missions & Technologies, Crystal City, Washington DC.
- Breger, L. and How, J. P. (2005). *J2-Modified GVE-Based MPC for Formation Flying Spacecraft*. AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit, San Francisco, California.
- Camacho, E. F. and Bordons, C. (2003). *Model Predictive Control*, Springer.
- Curtis, S. (1999). *The Magnetospheric Multiscale Mission Resolving Fundamental Processes in Space Plasmas*. NASA GSFC, Greenbelt, Ontario.
- de Lafontaine, J. (2003). *Note de cours commande multivariable appliquée à l'aérospatiale*, Université de Sherbrooke.
- De Nicolao, G., Magni, L., et al. (1998). Stabilizing Receding-Horizon Control of Nonlinear Time-Varying Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 43(7), p. 1030-1036.
- Dimitri, P. B. (2003). *Nonlinear Programming*, Athena Scientific.
- Fehse, W. (2003). *Automated Rendezvous and Docking of Spacecraft*, Cambridge university press.
- Gaulocher, S., Chrétien, J.-P., et al. (2004). *Closed-Loop Control of Formation Flying Satellites: Time and Parameter Varying Framework*. International Symposium on Formation Flying Missions & Technologies, Washington DC.
- Gim, D. and Alfriend, K. T. (2003). State Transition Matrix of Relative Motion for the Perturbed Noncircular Reference Orbit. *Journal of Guidance, Control and Dynamics* 26(6), p. 956-971.
- Inalhan, G. (2002). Relative Dynamics and Control of Spacecraft Formations in Eccentric Orbits. *Journal of Guidance, Control and Dynamics* 25(1), p. 48-59.
- Kron, A., Ulrich, S., et al. (2008). *Performance Demonstration of Autonomous Guidance and Control for Formation Flying on Eccentric Orbits*. CASI ASTRO, Montreal.

- Lee, J. H. and Ricker, N. L. (1994). Extended Kalman Filter Based Nonlinear Model Predictive Control. *Industrial & Engineering Chemistry Research* 33, p. 1530-1541.
- Lovell, T. A. (2003). *Analysis of the Reconfiguration and Maintenance of Close Formations*. 13 th AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting, Ponce, Puerto Rico.
- Lovell, T. A., Horneman, K. R., et al. (2004). A Guidance Algorithm for Formation Reconfiguration and Maintenance Based on the Perturbed Clohessy-Wiltshire Equations. *Advances in the Astronautical Sciences* 116(3), p. 2313-2330.
- Magni, J.-F. (2004). *Linear fractional transformation toolbox - modelling, order reduction, gain scheduling*. ONERA-DCSD, Toulouse, France.
- Ploen, S. R., Scarf, D. P., et al. (2004). *Dynamics of Earth Orbiting Formations*. AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit, Rhode Island.
- Rossiter, J. A. (2003). *Model-Based Predictive Control: A Practical Approach*, CRC Press.
- Rustem, B. (1998). *Algorithms for Nonlinear Programming and Multiple-Objective Decisions*, John Wiley & Son.
- Sabol, C. (2004). Satellite Formation Flying Design and Evolution. *Journal of Spacecraft and Rockets* 38(2), p. 1957-1969.
- Schaub, H. and Junkins, J. L. (2003). *Analytical Mechanics of Space Systems*, AIAA.
- Schweighart, S. A. (2002). Development and Analysis of a High Fidelity Linearized J2 Model for Satellite Formation Flying. *Journal of Guidance, Control and Dynamics* 25(6), p. 1073-1080.
- Serron, M. M., De Dona, J. A., et al. (2000). *Global Analytical Model Predictive Control with Input Constraints*. Conference on Decision and Control, Australia, Sydney.
- Simard Bilodeau, V. (2008). *Explicit Predictive Control Law for Satellite Formation Flying in Eccentric Orbits*. 18th AAS/AIAA Space Flight Mechanics Conference, Galveston, Texas.
- Tillerson, M. and How, J. P. (2001). *Formation Flying Control in Eccentric Orbits*. Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, Montreal, Canada.
- Tyagunov, A. A. (2004). *High-Performance Model Predictive Control for Process Industry*, Technische Universiteit Eindhoven.
- Vallado, D. A. (2001). *Fundamentals of Astrodynamics and Applications*, Microcosm Press and Kluwer Academic Publishers.
- Wismer, D. A. and Chattergy, R. (1979). *Introduction to Nonlinear Optimization*, North-Holland.